3 Reellwertige Zufallsvariablen

Oft interessiert man sich (nur) für spezielle Aspekte eines Zufallsexperimentes. Dazu betrachtet man Abbildungen $\Omega \to \mathbb{R}$.

Bezeichnung Indikatorfunktion $1_U : V \to \mathbb{R}$ einer Teilmenge $U \subseteq V$ definiert durch

$$1_U(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in U \\ 0, & \text{falls } x \notin U\,. \end{cases}$$

32. Beispiel Anzahl Anrufe in Callcenter an Tagen $1, \ldots, n$:

$$\Omega := \mathbb{N}_0^n := \{\underbrace{(\omega_1, \ldots, \omega_n)}_{=:\omega} : \omega_i \in \mathbb{N}_0 \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$

$$\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$$

- Anzahl Anrufe an Tag i, $X_i(\omega) := \omega_i$
- Gesamtanzahl der Anrufe, $X(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$
- Wurde an Tag i die Kapazitätsgrenze K überschritten?, $Y_i(\omega) := 1_{\{K+1,\ldots\}}(\omega_i)$
- Anzahl der Tage, an denen Kapazitätsgrenze K überschritten, $Y(\omega) := \sum_{i=1}^n 1_{\{K+1,\ldots\}}(\omega_i)$

33. Definition $X : \Omega \to \mathbb{R}$ (reellwertige) Zufallsvariable (ZV) (auf W'raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$), falls

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{A}.$$

Manchmal zugelassen: Funktionswerte $\pm\infty$. Vergleiche Topologie, stetige Abbildung. Siehe auch Lemma 39 und Lemma V.13.

34. Bemerkung

- ZVen sind Abbildungen!
- Für ZV sind die W'keiten $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$ definiert
- Im Falle $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ ist jede Abbildung $\Omega \to \mathbb{R}$ eine ZV

Bezeichnung Kurzschreibweise

$$\{X \in B\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$$

für Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $B \subseteq \mathbb{R}$ sowie

$$\{X \leq x\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X \in]-\infty, x]\}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Analog mit „$=$“ usw.

Also Urbilder von Mengen: $\{X \in B\} = X^{-1}(B)$.

35. Beispiel Callcenter

$$\Omega := \mathbb{N}_0^n, \quad \mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega), \quad X_i(\omega) := \omega_i.$$

Es gilt (Verknüpfung von ZVen)

$X = \sum_{i=1}^n X_i, \quad Y_i = 1_{\{K+1,\dots\}} \circ X_i, \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i.$

Gängige Schreibweise $1_A(X_i)$ für $1_A \circ X_i$.

Spezielle Ereignisse: Gesamtanzahl der Anrufe liegt zwischen 1000 und 2000, $\{1000 \leq X \leq 2000\}$, Kapazitätsgrenze K wurde nie überschritten,

$$\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq K\} = \bigcap_{i=1}^n \{Y_i = 0\} = \{Y = 0\}.$$

36. Definition Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ einer ZV X auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ definiert durch

$$F_X(x) := P(\{X \leq x\}).$$

Gleichheit von ZVen in folgendem schwachen Sinn.

37. Definition ZVen X auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und X' auf $(\Omega', \mathfrak{A}', P')$ identisch verteilt, falls $F_X = F_{X'}$.

38. Beispiel P Gleichverteilung auf $\Omega := \{1, \ldots, n\}$ und $X(\omega) := \omega$. Dann:

$$P(\{X = x\}) = \begin{cases} 1/n, & \text{falls } x \in \{1, \ldots, n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Betrachte den W'raum $(\Omega', \mathfrak{A}', P')$ zur Modellierung von Pfeiltreffer auf Dartscheibe, siehe Bsp. 15. Definiere $A'_0 = \{(0,0)\}$ und für $x = 1, \ldots, n$ Sektoren:

$$A'_x := \{\rho(\cos\alpha, \sin\alpha) : \rho \in \,]0, r]\,,$$
$$\alpha \in \,](x-1)/n \cdot 2\pi, x/n \cdot 2\pi]\}$$

Sei $X'(\omega')$ der getroffene Sektor, d.h. $X'(\omega') := x$, falls $\omega' \in A'_x$. Dann für $x = 1, \ldots, n$

$$P'(\{X' = x\}) = P'(A'_x) = \lambda(A'_x)/\lambda(\Omega') = 1/n,$$

sowie $P'(\{X' = x\}) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, \ldots, n\}$.

Also: $\forall x \in \mathbb{R} : P(\{X = x\}) = P'(\{X' = x\})$.

Beh.: X und X' sind identisch verteilt.

Beweis. Für $x \in \mathbb{R}$, $M := \left]-\infty, x\right]$ und $D := \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} P(\{X \leq x\}) &= P(\{X \in M\} \cap \{X \in D\}) \\ &= \sum_{y \in D} P(\{X \in M\} \cap \{X = y\}) \\ &= \sum_{y \in M \cap D} \underbrace{P(\{X = y\})}_{= P'(\{X' = y\})} \\ &= P'(\{X' \leq x\}). \end{aligned}$$

Siehe auch Lemma III.23. Warnung! $\square$

Bezeichnung $\mathfrak{M} := \{M \subseteq \mathbb{R} : M$ oder M^{c} Intervall$\}$

39. Lemma Für jede Zufallsvariable X auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ gilt

$$\forall M \in \mathfrak{M} : \ \{X \in M\} \in \mathfrak{A}.$$

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$.

0. Für $M = \mathbb{R}$ gilt $\{X \in M\} = \Omega \in \mathfrak{A}$.
1. Für $M = \left]-\infty, b\right]$ gilt $\{X \in M\}$ nach Def. einer ZV.
2. Für $M = \left]a, \infty\right]$ gilt $M = \mathbb{R} \setminus \left]-\infty, a\right]$, also:
   $\{X \in M\} = \{X \in \mathbb{R}\} \setminus \{X \in \left]-\infty, a\right]\} \in \mathfrak{A}$
3. Für $M = \left]-\infty, b\right[$ gilt $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left]-\infty, b - \frac{1}{n}\right]$, also:
   $\{X \in M\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{X \in \left]-\infty, b - \frac{1}{n}\right]\} \in \mathfrak{A}$.
4. Für $M = \left[a, \infty\right[$ gilt $M = \mathbb{R} \setminus \left]-\infty, a\right[$, also:
   $\{X \in M\} = \{X \in \mathbb{R}\} \setminus \{X \in \left]-\infty, a\right[\} \in \mathfrak{A}$.
5. Beschränkte Intervalle sind Durchschnitte der unter 1.–4. betrachteten Intervalle, und es gilt

$$\{X \in I_1 \cap I_2\} = \{X \in I_1\} \cap \{X \in I_2\}.$$

Demnach gilt die Aussage für alle Intervalle, unter Benutzung der Definition der σ-Algebra auch für deren Komplemente. $\square$

40. Satz ZVen X auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und X' auf $(\Omega', \mathfrak{A}', P')$ genau dann identisch verteilt, wenn

$$\forall M \in \mathfrak{M} : \; P(\{X \in M\}) = P'(\{X' \in M\}).$$

Beweis. Zu zeigen ist nur „$\Rightarrow$“. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

1. Für $M :=]a, b]$ gilt

$$\begin{aligned} P(\{X \in M\}) &= P(\{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\}) \\ &= P(\{X \leq b\}) - P(\{X \leq a\}) \\ &= P'(\{X' \leq b\}) - P'(\{X' \leq a\}) = P'(\{X' \in M\}). \end{aligned}$$

2. Für $M :=]a, b[$ gilt $M = \bigcup_{n=1}^{\infty}]a, b - 1/n]$. Also nach <u>ÜBUNG</u> und 1.

$$\begin{aligned} P(\{X \in M\}) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \in]a, b - 1/n]\}\right) \\ &= \lim_{n \to \infty} P\left(\{X \in]a, b - 1/n]\}\right) \\ &= \lim_{n \to \infty} P'\left(\{X' \in]a, b - 1/n]\}\right) = P'(\{X' \in M\}). \end{aligned}$$

3. Für $M := \{a\}$ gilt

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} \,]a - 1/n, a + 1/n[\, .$$

Also nach <u>Übung</u> und 2.

$$\begin{aligned} P(\{X \in M\}) &= \lim_{n \to \infty} P\left(\{X \in \,]a - 1/n, a + 1/n[\}\right) \\ &= \lim_{n \to \infty} P'\left(\{X' \in \,]a - 1/n, a + 1/n[\}\right) \\ &= P'(\{X' \in M\}). \end{aligned}$$

Für alle weiteren Typen von Mengen $M \in \mathfrak{M}$ nutze man die σ-Additivität, Additivität und die Rechenregel für Komplemente. $\square$

41. Bemerkung Gemäß Satz 40 bestimmt die Verteilungsfunktion F_X die Wahrscheinlichkeiten $P(\{X \in M\})$ für $M \in \mathfrak{M}$ eindeutig. Siehe auch Satz V.55.

Im folgenden:

- $I := \{1, \ldots, n\}$ oder $I := \mathbb{N}$
- $(X_i)_{i \in I}$ Folge von ZVen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$

42. Definition $(X_i)_{i \in I}$ identisch verteilt, falls für alle $i, j \in I$ die ZVen X_i und X_j identisch verteilt.

43. Definition $(X_i)_{i\in I}$ unabhängig, falls für jede Folge $(x_i)_{i\in I}$ in $\mathbb{R}$ gilt: $(\{X_i \le x_i\})_{i\in I}$ unabhängig.

44. Bemerkung Nach Definition äquivalent: für alle endlichen Mengen $J \subseteq I$ mit $|J| \ge 2$ und Folgen $(x_j)_{j\in J}$ in $\mathbb{R}$ gilt

$$P\left(\bigcap_{j\in J}\{X_j \le x_j\}\right) = \prod_{j\in J} P(\{X_j \le x_j\}).$$

45. Beispiel Zweimaliger Münzwurf, siehe Bsp. 27. Betrachte für $i = 1, 2$ die ZVen $X_i(\omega) := 1_{\{\mathsf{Z}\}}(\omega_i)$.

Beh.: X_1 und X_2 sind unabhängig und identisch verteilt.

Beweis. Es gilt:

$$\{X_i \leq x\} = \begin{cases} \emptyset & \text{für } x < 0 \\ \{\omega \in \Omega : \omega_i = K\} & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ \Omega & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Also:

$$P(\{X_i \leq x\}) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x < 0 \\ \frac{1}{2} & , \text{ falls } 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \text{ falls } x \geq 1 \end{cases}$$

Insbesondere sind X_1 und X_2 identisch verteilt.

□

Für die Unabhängigkeit ist noch zu zeigen:

$$P(\{X_1 \le x_1\} \cap \{X_2 \le x_2\}) = P(\{X_1 \le x_1\}) \cdot P(\{X_2 \le x_2\}) \quad (1)$$

Klar: (1) gilt, falls $x_1 < 0, x_2 < 0, x_1 \ge 1$ oder $x_2 \ge 1$. Für $x_i \in [0, 1[$ gilt:

$$P(\{X_1 \le x_1\} \cap \{X_2 \le x_2\}) = P(\{(K, K)\}) = \frac{1}{4}$$

$$= P(\{X_1 \le x_1\}) \cdot P(\{X_2 \le x_2\})$$

$\square$

46. Satz $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ genau dann unabhängig, wenn

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall M_1, \ldots, M_n \in \mathfrak{M} :$$

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} \{X_j \in M_j\}\right) = \prod_{j=1}^{n} P(\{X_j \in M_j\}).$$

Analog für $I := \{1, \ldots, n\}$. Siehe auch Satz V.21.

Beweis. <u>TUTORIUM</u> $\square$

Stochastische Modelle beruhen sehr häufig auf einer unabhängigen Folge von identisch verteilten ZVen. Abkürzung: iid für independent and identically distributed.