2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit

Betrachte W'raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Übergang zu neuem W'maß, falls bekannt, daß B eingetreten.

17. Definition Für $A, B \in \mathfrak{A}$ mit $P(B) > 0$ heißt

$$P(A \mid B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B.

18. Bemerkung $P(\cdot \mid B)$ ist ein W'maß auf $\mathfrak{A}$ mit $P(B \mid B) = 1$. „Restriktion“ auf B und Normierung.

19. Beispiel Für Gleichverteilung P auf endlicher Menge Ω, $\emptyset \neq B \subseteq \Omega$ und $A \subseteq \Omega$ gilt

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|},$$

d.h. $P(A \mid B)$ ist relativer Anteil von Elementen aus A in B.

„Gleichverteilung“ auf B.

20. Beispiel Einmaliges Würfeln (wie üblich modelliert) und $B := \{1, 5, 6\}$. Dann

$$P(\{\omega\} \mid B) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{falls } \omega \in B \\ 0, & \text{falls } \omega \notin B. \end{cases}$$

21. Beispiel 2 weiße (1, 2) und 3 schwarze (3, 4, 5) Kugeln, ziehe 2 Kugeln ohne Zurücklegen. Gesucht: Wahrscheinlichkeit, daß die 2. Kugel schwarz, falls die 1. Kugel weiß. Modell: Gleichverteilung auf

$$\Omega := \{(\omega_1, \omega_2) \in \{1, \dots, 5\}^2 : \omega_1 \neq \omega_2\}.$$

Für

$$A := \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : \omega_2 \geq 3\},$$

$$B := \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : \omega_1 \leq 2\}$$

gilt (wie erwartet)

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

22. Satz Für p.d. Mengen $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{A}$ mit $P(B_i) > 0$ für alle i und $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ gilt für jedes $A \in \mathfrak{A}$ die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \,|\, B_i) \cdot P(B_i),$$

und, falls $P(A) > 0$, die Formel von Bayes,

$$P(B_i \,|\, A) = \frac{P(A \,|\, B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A \,|\, B_j) \cdot P(B_j)}.$$

Analog für abzählbar viele Mengen B_i, $i \in \mathbb{N}$.

Beweis. Totale Wahrscheinlichkeit: Es gilt

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

mit p.d. Mengen $A \cap B_i$. Somit folgt

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \,|\, B_i) \cdot P(B_i).$$

Formel von Bayes: Es gilt für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$P(B_i \,|\, A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} \cdot \frac{P(B_i)}{P(B_i)} = \frac{P(A \,|\, B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)}.$$

Die Behauptung folgt nun mit Hilfe der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit. $\square$

23. Beispiel Situation:

- 3 Maschinen, $i = 1, 2, 3$
- Anteil an Tagesproduktion, $r_i = 60\%, 30\%, 10\%$
- Anteil defekter Produkte pro Maschine, $d_i = 1\%, 2\%, 3\%$

Fragen:

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig gewähltes Produkt defekt?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein defektes Produkt von Maschine 1?

Modell:

(i) $\Omega := \{(1,+),(1,-),(2,+),(2,-),(3,+),(3,-)\}$

(ii) $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$

(iii) P definiert durch

$$P(\{i,-\}) := r_i \cdot d_i, \qquad P(\{i,+\}) := r_i \cdot (1-d_i)$$

Für $D := \{(1,-),(2,-),(3,-)\}$, $M_i := \{(i,+),(i,-)\}$

$$P(M_i) = r_i, \qquad P(D \mid M_i) = \frac{r_i \cdot d_i}{r_i} = d_i.$$

Häufig wie in diesem Beispiel: Modellierung durch Vorgabe bedingter Wahrscheinlichkeiten, etwa bei Markov-Ketten.

Man erhält

$$P(D) = d_1 r_1 + d_2 r_2 + d_3 r_3 = \frac{3}{200}$$

und

$$P(M_1 \mid D) = \frac{P(D \mid M_1) \cdot P(M_1)}{P(D)} = \frac{200}{3} \cdot d_1 r_1 = \frac{2}{5}.$$

24. Definition $A, B \in \mathfrak{A}$ unabhängig, falls

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

25. Bemerkung Falls $P(B) > 0$:

$$A, B \text{ unabhängig} \Leftrightarrow P(A \mid B) = P(A).$$

26. Beispiel Einmaliges Würfeln (wie üblich modelliert)

$$B := \{1,2,3,4\}, \quad A_1 := \{2,4,6\}, \quad A_2 := \{1\}.$$

Dann gilt

$$P(A_1 \mid B) = \frac{1}{2}, \quad P(A_1) = \frac{1}{2},$$

d.h. A_1, B unabhängig. Ferner gilt

$$P(A_2 \mid B) = \frac{1}{4}, \quad P(A_2) = \frac{1}{6},$$

d.h. A_2, B nicht unabhängig.

27. Beispiel Zweimaliger Wurf einer fairen Münze,

$$\Omega := \{(\mathsf{Z},\mathsf{Z}), (\mathsf{Z},\mathsf{K}), (\mathsf{K},\mathsf{Z}), (\mathsf{K},\mathsf{K})\},$$

$\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$ und P Gleichverteilung auf Ω. Betrachte:

$$A_1 := \{(\mathsf{Z},\mathsf{Z}), (\mathsf{Z},\mathsf{K})\} \quad \text{1. Wurf Z}$$

$$A_2 := \{(\mathsf{Z},\mathsf{K}), (\mathsf{K},\mathsf{K})\} \quad \text{2. Wurf K}$$

$$A_3 := \{(\mathsf{Z},\mathsf{K}), (\mathsf{K},\mathsf{Z})\} \quad \text{Würfe verschieden}$$

Es gilt $|A_i| = 2$ und $|A_i \cap A_j| = 1$ für $i \neq j$. Also:

A_1, A_2 unabh., A_1, A_3 unabh., A_2, A_3 unabh.

Im folgenden $I := \{1, \ldots, n\}$ oder $I := \mathbb{N}$.

28. Definition Folge $(A_i)_{i \in I}$ von Ereignissen unabhängig, falls für jede endliche Menge $\emptyset \neq J \subseteq I$ gilt

$$P\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

Spezialfall $|I| = |J| = 2$ in Definition 24.

29. Bemerkung Falls $(A_i)_{i \in I}$ unabhängig, so folgt die paarweise Unabhängigkeit

$$\forall j_1, j_2 \in I,\ j_1 \neq j_2 : \ A_{j_1}, A_{j_2} \text{ unabhängig.}$$

Umkehrung ist falsch, wie das folgende Beispiel zeigt.

30. Beispiel Zweimaliger Wurf einer fairen Münze, siehe Bsp. 27. Ereignisse A_1, A_2, A_3 nicht unabhängig, da

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$$

Alternativ: $P(A_3|A_1 \cap A_2) = 1$, aber $P(A_3) = 1/2$, siehe Bem. 31.

31. Bemerkung Gelte $P(A_i) > 0$ für alle $i \in I$. Dann $(A_i)_{i \in I}$ unabhängig, gdw. für alle $\emptyset \neq J_1, J_2 \subseteq I$ endlich mit $J_1 \cap J_2 = \emptyset$:

$$P\Big(\bigcap_{j_1 \in J_1} A_{j_1} | \bigcap_{j_2 \in J_2} A_{j_2}\Big) = P\Big(\bigcap_{j_1 \in J_1} A_{j_1}\Big)$$

Beweis. <u>ÜBUNG</u> $\square$