Kap. II Stochastische Modelle

1. Wahrscheinlichkeitsräume
2. Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit
3. Reellwertige Zufallsvariablen

Mathematisches Modell für zufälliges Phänomen:

- Wahrscheinlichkeitsraum
  - Ergebnisraum
  - Ereignisraum
  - Wahrscheinlichkeitsmaß
- Zufallsvariablen

In den Kapiteln II–VI:

- allgemeine Begriffsbildung und Konstruktionen
- konkrete Modelle
- Analyse und Simulation stochastischer Modelle

1 Wahrscheinlichkeitsräume

Ergebnisraum Ω ist nicht-leere Menge, Elemente $\omega \in \Omega$ sind die möglichen Ergebnisse des Zufallsexperimentes.

1. Beispiel

- Würfeln, $\Omega := \{1, \ldots, 6\}$
- Anzahl Anrufe in Callcenter, $\Omega := \mathbb{N}_0$
- Wartezeit bei Anruf, $\Omega := \mathbb{R}_+ := [0, \infty[$
- Verlauf eines Aktienkurses, $\Omega := C_+([0, 1])$ Menge der nicht-negativen stetigen Funktionen auf $[0, 1]$

Für gewisse Teilmengen $A \subseteq \Omega$, genannt Ereignisse, definiert man die Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens ($\omega \in A$).

Ereignisraum $\mathfrak{A}$ ist die Menge aller Ereignisse in Ω.

2. Beispiel

- Würfeln, Ergebnis ist gerade Zahl, $A := \{2, 4, 6\}$
- Anzahl Anrufe in Callcenter, Kapazitätsgrenze K nicht überschritten, $A := \{0, \ldots, K\}$
- Wartezeit bei Anruf, Wartezeit liegt zwischen 1 und 2 (Minuten), $A := [1, 2]$

- Verlauf eines Aktienkurses, Kurs weicht von Anfangswert um nicht mehr als 1 (Euro) ab, $A := \{\omega \in C_+([0,1]) : \sup_{0\leq t\leq 1} |\omega(0) - \omega(t)| \leq 1\}$

Mengentheoretische Operationen mit Ereignissen.

3. Beispiel

- Ereignis A oder Ereignis B tritt ein, $A \cup B$
- Ereignis A und Ereignis B treten ein, $A \cap B$
- Ereignis A tritt nicht ein, $A^{\mathsf{c}} := \Omega \setminus A$
- (mindestens) eines der Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ tritt ein, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$
- alle Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ treten ein, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

Forderung: obige Operationen liefern wieder Ereignisse.

Dazu Begriff der σ-Algebra.

Bezeichnung $\mathfrak{P}(\Omega)$ Potenzmenge von Ω (Menge aller Teilmengen von Ω), $|U|$ Mächtigkeit (Anzahl der Elemente) einer endlichen Menge U.

4. Beispiel Münzwurf, $\Omega := \{\mathsf{Z}, \mathsf{K}\}$,

$$\mathfrak{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{\mathsf{Z}\}, \{\mathsf{K}\}, \{\mathsf{Z}, \mathsf{K}\}\}\,.$$

Beachte Z $\notin \mathfrak{P}(\Omega)$, aber $\{\mathsf{Z}\} \in \mathfrak{P}(\Omega)$.

5. Bemerkung Falls Ω endlich,

$$|\mathfrak{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}.$$

Beweis. Durch Induktion über $n := |\Omega|$.

Verankerung: $|\Omega| = 0$, also $\Omega = \emptyset$ und $|\mathfrak{P}(\Omega)| = |\{\emptyset\}| = 1$.

Induktionsschritt: $|\Omega| = n + 1 \geq 1$. Fixiere $\omega^* \in \Omega$. Dann

$$\begin{aligned} |\mathfrak{P}(\Omega)| &= |\{A \subseteq \Omega : \omega^* \in A\}| + |\{A \subseteq \Omega : \omega^* \notin A\}| \\ &= 2^n + 2^n = 2^{n+1}. \end{aligned}$$

$\square$

6. Definition $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ σ-Algebra (in Ω), falls:

(i) $\Omega \in \mathfrak{A}$

(ii) $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{A}$

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$

Vgl. Topologie: Menge $\mathfrak{O}$ der offenen Teilmengen von Ω, z.B. $\Omega := \mathbb{R}^d$.

Forderung: Ereignisraum ist σ-Algebra.

7. Bemerkung In der Regel betrachtet man $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$, falls Ω abzählbar. Nicht so, falls Ω überabzählbar, siehe Kapitel V.

8. Lemma Für jede σ-Algebra $\mathfrak{A}$ gilt:

(i) $\emptyset \in \mathfrak{A}$

(ii) $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \cup B,\ A \cap B, A \setminus B \in \mathfrak{A}$,

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$

Beweis.

(i) $\emptyset = \Omega^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{A}$ nach Def. 6.(i), (ii).

(ii) $A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$, verwende (i) und Def. 6.(iii).

$A \cap B = (A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}}$, verwende Def. 6.(ii) und $A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{A}$.

$A \setminus B = A \cap B^{\mathsf{c}}$, wie zuvor.

(iii) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{A}$ nach Def. 6.(ii), (iii).

$\square$

Bezeichnung Mengen $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt (p.d.), falls $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Im folgenden $\mathfrak{A}$ σ-Algebra in nicht-leerer Menge Ω, z.B. $\Omega := \mathbb{N}_0$ und $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$.

Zuordung von Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ zu den einzelnen Ereignissen $A \in \mathfrak{A}$. Dabei folgende Vorstellung:

- bei „großer“ Anzahl von „unabhängigen“ Wiederholungen des Zufallsexperimentes liegt die relative Häufigkeit des Eintretens von Ereignis A „nahe“ bei $P(A)$.

9. Definition $P : \mathfrak{A} \to [0, 1]$ Wahrscheinlichkeitsmaß oder Wahrscheinlichkeitsverteilung (auf $\mathfrak{A}$), falls:

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}$ p.d. $\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

(σ-Additivität)

Genauer: ... $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (absolut) konvergent und ...

10. Beispiel Ω endlich, Laplace-Annahme

$$P(A) := |A|/|\Omega|, \qquad A \subseteq \Omega.$$

Speziell für jedes $\omega \in \Omega$

$$P(\{\omega\}) = 1/|\Omega|.$$

Beh.: P Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$, genannt Gleichverteilung auf Ω.

Beweis. Offensichtlich gilt $0 \leq P(A) \leq 1$ und $P(\Omega) = 1$.

Für $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$ p.d. (notwendig: $A_i = \emptyset$ bis auf endlich viele i) gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right| = \sum_{i=1}^{\infty} |A_i| \, .$$

Dies zeigt die σ-Additivität. $\square$

11. Definition $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum, falls Ω nicht-leere Menge, $\mathfrak{A}$ σ-Algebra in Ω und P W'maß auf $\mathfrak{A}$.

12. Beispiel Stochastisches Modell für einmaliges Würfeln:

W'raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit:

(i) $\Omega := \{1, \ldots, 6\}$

(ii) $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$

(iii) P Gleichverteilung auf Ω

13. Beispiel Stochastisches Modell für Geschlecht eines Neugeborenen: Wahrscheinlichkeitraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit:

(i) $\Omega := \{\mathsf{W}, \mathsf{M}\}$

(ii) $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$

(iii) P definiert durch $P(\{\mathsf{W}\}) := 0,4863$.

Letzteres empirisch ermittelt als relative Häufigkeit unter den $25\,171\,123$ Lebendgeburten in D in den Jahren 1970–1999. Siehe Hesse (2003, p. 23).

14. Beispiel Hard core model der Physik, Gleichverteilung auf sehr großer Menge „unbekannter“ Mächtigkeit.

PROJEKTOR

15. Beispiel (Fragwürdiges) stochastisches Modell für Pfeiltreffer auf Dartscheibe mit Radius $r > 0$:

(i) $\Omega := \{\underbrace{(x, y)}_{=:\omega} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$

(ii) $\mathfrak{A}$ eine „σ-Algebra in Ω, deren Elementen ein ‘Flächeninhalt’ $\lambda(A)$ zugeordnet werden kann“, siehe Kapitel V.1.

(iii) $P(A) := \lambda(A)/(\pi r^2)$

Beachte: $P(\{\omega\}) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$.

Im folgenden stets $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ W'raum.

16. Satz Rechenregeln für W'maße

Für $A, B \in \mathfrak{A}$ gilt:

(i) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(Additivität)

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$

(iii) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ (Monotonie)

(iv) $P(A^{\mathsf{c}}) = 1 - P(A)$

(v) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Beweis. Seien $A, B \subseteq \Omega$.

(i) Gelte $A \cap B = \emptyset$. Dann gilt
$A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \ldots$ mit p.d. Mengen, und somit
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) + \Sigma_{i=1}^{\infty} P(\emptyset) < \infty$.
Es folgt $P(\emptyset) = 0$ und die Behauptung.

(ii) Gelte $A \subseteq B$. Dann $B = A \cup (B \setminus A)$. Da A und $B \setminus A$ disjunkt, folgt $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$.

(iii) Verwende (ii) und $P(B \setminus A) \geq 0$.

(iv) Verwende (ii) mit $B = \Omega$, also $P(B) = 1$.

(v) Verwende $A \cup B = A \cup (B \setminus A) = A \cup (B \setminus (A \cap B))$.
Somit $A \cap (B \setminus (A \cap B)) = \emptyset$, $A \cap B \subseteq B$, und (i), (ii) liefern
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

□