Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

13.12.2006

9. Übung

Geometrische Datenverarbeitung WS 2006/07

Aufgabe 32: [H] Für kardinale B-Splines, also B-Splines mit Knoten $T = \mathbb{Z}$, soll die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} b_j^n(t) b_i^m(t)\, dt = b_{j-m}^{n+m}(i)$$

bewiesen werden.

a) Überprüfen Sie das Resultat zunächst für den Fall $n = m = 2$.

b) Geben Sie die Formeln für die Differenziation und Integration von B-Splines für den Fall $T = \mathbb{Z}$ an.

c) Zeigen Sie $b_\ell^r(k) = b_0^r(k - \ell)$ und folgern Sie daraus, dass es genügt, die Formel für $j = 0$ zu beweisen.

d) Beweisen Sie die Formel speziell für $m = 1$. Verwenden Sie dazu die Resultate aus Aufgabe 21.

e) Beweisen Sie die Formel mittels vollständiger Induktion und partieller Integration für allgemeines m.

Aufgabe 33: [H] Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und

$$f := Qg := \sum_{j=1}^{m} b_j^n g(\mu_j)$$

ein daraus abgeleiteter Spline mit Knoten T. Dabei sind die μ_j die Greville-Abszissen gemäß Aufgabe 25. Man nennt Q den *Schoenberg-Operator*. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) f und g stimmen auf $D(T)$ überein, falls $g(t) = at + b$ linear ist.

b) Wenn g ein Polynom der Ordnung 3 ist, dann ist auch f ein Polynom der Ordnung 3 auf $D(T)$.

c) Auf $D(T)$ gilt

$$g \geq 0 \;\Rightarrow\; f \geq 0, \quad g' \geq 0 \;\Rightarrow\; f' \geq 0, \quad g'' \geq 0 \;\Rightarrow\; f'' \geq 0, \quad g''' \geq 0 \;\Rightarrow\; f''' \geq 0.$$

Aufgabe 34: [M] Sei $\mathbf{c}(t) = [x(t), y(t)]$, $t \in [a, b]$ eine glatte, positiv orientierte Jordankurve und Γ das von $\mathbf{c}$ berandete Gebiet.

a) Zeigen Sie mit Hilfe eines geeigneten Integralsatzes, dass für den Flächeninhalt von Γ gilt

$$|\Gamma| = \int_{t=a}^{b} x(t) y'(t)\, dt.$$

b) Sei nun speziell $\mathbf{c} = B^n \mathbf{P} = \sum_{j=1}^{r} b_j^n \mathbf{p}_j$ eine periodische Splinekurve mit Knoten $\tau_j = j$. Die x- und y-Koordinaten der Kontrollpunkte bilden Vektoren X und Y, also $\mathbf{P} = [X, Y]$. Geben Sie eine $(r \times r)$-Matrix M an mit

$$|\Gamma| = X^{\mathrm{t}} M Y.$$

Verwenden Sie hierzu das Resultat aus Aufgabe 32.

c) Bestimmen Sie M konkret für die Ordnungen $n = 2$ und $n = 3$.

Aufgabe 35: [P] Schreiben Sie ein Matlab-Programm

$$\mathbf{Q} = \texttt{FourPoint}(\mathbf{P}, w),$$

das einen Schritt des Vierpunktschemas mit Gewichten $(-w,\ 1/2 + w,\ 1/2 + w,\ -w)$ auf das Kontrollpolygon $\mathbf{P}$ in $\mathbb{R}^d$ anwendet.