



13.12.2006

9. Übung

Geometrische Datenverarbeitung WS 2006/07

Aufgabe 32: [H] Für kardinale B-Splines, also B-Splines mit Knoten $T = \mathbb{Z}$, soll die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} b_j^n(t) b_i^m(t) dt = b_{j-m}^{n+m}(i)$$

bewiesen werden.

- Überprüfen Sie das Resultat zunächst für den Fall $n = m = 2$.
- Geben Sie die Formeln für die Differenziation und Integration von B-Splines für den Fall $T = \mathbb{Z}$ an.
- Zeigen Sie $b_\ell^r(k) = b_0^r(k - \ell)$ und folgern Sie daraus, dass es genügt, die Formel für $j = 0$ zu beweisen.
- Beweisen Sie die Formel speziell für $m = 1$. Verwenden Sie dazu die Resultate aus Aufgabe 21.
- Beweisen Sie die Formel mittels vollständiger Induktion und partieller Integration für allgemeines m .

Aufgabe 33: [H] Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und

$$f := Qg := \sum_{j=1}^m b_j^n g(\mu_j)$$

ein daraus abgeleiteter Spline mit Knoten T . Dabei sind die μ_j die Greville-Abszissen gemäß Aufgabe 25. Man nennt Q den *Schoenberg-Operator*. Zeigen oder widerlegen Sie:

- f und g stimmen auf $D(T)$ überein, falls $g(t) = at + b$ linear ist.
- Wenn g ein Polynom der Ordnung 3 ist, dann ist auch f ein Polynom der Ordnung 3 auf $D(T)$.
- Auf $D(T)$ gilt

$$g \geq 0 \Rightarrow f \geq 0, \quad g' \geq 0 \Rightarrow f' \geq 0, \quad g'' \geq 0 \Rightarrow f'' \geq 0, \quad g''' \geq 0 \Rightarrow f''' \geq 0.$$

Aufgabe 34: [M] Sei $\mathbf{c}(t) = [x(t), y(t)]$, $t \in [a, b]$ eine glatte, positiv orientierte Jordankurve und Γ das von \mathbf{c} berandete Gebiet.

- Zeigen Sie mit Hilfe eines geeigneten Integralsatzes, dass für den Flächeninhalt von Γ gilt

$$|\Gamma| = \int_{t=a}^b x(t) y'(t) dt.$$

- Sei nun speziell $\mathbf{c} = B^n \mathbf{P} = \sum_{j=1}^r b_j^n \mathbf{p}_j$ eine periodische Splinekurve mit Knoten $\tau_j = j$. Die x - und y -Koordinaten der Kontrollpunkte bilden Vektoren X und Y , also $\mathbf{P} = [X, Y]$. Geben Sie eine $(r \times r)$ -Matrix M an mit

$$|\Gamma| = X^t M Y.$$

Verwenden Sie hierzu das Resultat aus Aufgabe 32.

- Bestimmen Sie M konkret für die Ordnungen $n = 2$ und $n = 3$.

Aufgabe 35: [P] Schreiben Sie ein Matlab-Programm

$$\mathbf{Q} = \text{FourPoint}(\mathbf{P}, w),$$

das einen Schritt des Vierpunktschemas mit Gewichten $(-w, 1/2 + w, 1/2 + w, -w)$ auf das Kontrollpolygon \mathbf{P} in \mathbb{R}^d anwendet.