Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

06.12.2006

8. Übung

Geometrische Datenverarbeitung WS 2006/07

Aufgabe 29: [H]
a) Sei $\mathbf{f} = B^n\mathbf{P}$ eine Splinekurve in $\mathbb{R}^d$. Im Fall $\#j = n-2$ gilt gemäß Aufgabe 25, dass $\mathbf{f}(\tau_j) = \mathbf{p}_{j-1}$. Überlegen Sie sich zunächst, dass die Kurve $\mathbf{f}$ im Punkt τ_j aufgrund der lokalen Konvexe-Hülle-Eigenschaft im Allgemeinen einen Knick haben muss. Bestimmen Sie dann die Grenzwerte

$$\lim_{t\uparrow\tau_j} \mathbf{f}'(t) \quad \text{und} \quad \lim_{t\downarrow\tau_j} \mathbf{f}'(t)$$

und diskutieren Sie das Ergebnis (siehe Skript Seite 71, links unten).

b) Sei $\mathbf{f} = B^n\mathbf{P}$ eine Splinekurve in $\mathbb{R}^d$ mit einfachen Knoten. Zeigen Sie: Im Fall eines $(n-1)$-fachen Kontrollpunkts $\mathbf{p}_{j-n+1} = \cdots = \mathbf{p}_{j-1}$ gilt $\mathbf{f}(\tau_j) = \mathbf{p}_{j-1}$ und $\mathbf{f}'(\tau_j) = \mathbf{0}$. Üerlegen Sie sich dann, dass die Kurve $\mathbf{f}$ auf dem Intervall $[\tau_{j-1}, \tau_{j+1})$ aufgrund der Konvexe-Hülle-Eigenschaft im Allgemeinen aus zwei geradlinigen Segmenten besteht, die auf dem Kontrollpolygon durch $\mathbf{p}_{j-n}, \mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_j$ liegen und diskutieren Sie das Ergebnis (siehe Skript Seite 71, rechts unten).

Aufgabe 30: [H]
Gegeben seien zwei Splineräume S_{n^1,T^1} und S_{n^2,T^2} mit $D(T^1) = D(T^2)$.

a) Geben Sie einen Splineraum S_{n^+,T^+} mit möglichst wenigen Knoten an, sodass $f + g \in S_{n^+,T^+}$ für alle $f \in S_{n^1,T^1}$ und $g \in S_{n^2,T^2}$.

b) Geben Sie einen Splineraum S_{n^*,T^*} mit möglichst wenigen Knoten an, sodass $fg \in S_{n^*,T^*}$ für alle $f \in S_{n^1,T^1}$ und $g \in S_{n^2,T^2}$.

Aufgabe 31: [M]
a) Bezeichne $b^n_{j,h}$ den B-Spline der Ordnung n mit Knoten $\tau_\ell = \ell h$ und Träger $[\tau_j, \tau_{j+n}]$. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Beziehung

$$b^n_{j,2h} = 2^{1-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^n_{2j+k,h}\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Differenziationsformel.

b) Geben Sie einen Algorithmus $\{p_j\} \to \{q_j\}$ an, der den Übergang der Kontrollpunkte bezüglich Knotenabstand $2h$ zu Knotenabstand h beschreibt,

$$\sum_j b^n_{j,2h}\, p_j = \sum_j b^n_{j,h}\, q_j\,.$$

c) Diskutieren Sie die Spezialfälle $n = 3$ und $n = 4$.

Aufgabe 32: [P]
a) Schreiben Sie ein Matlab-Programm

$$[\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{T}] = \texttt{KnotIns}(\mathbf{P}, T, \tau),$$

das zu einem gegebenen Spline $\mathbf{f} = B^n\mathbf{P}$ mit Knoten T die Kontrollpunkte des Splines $\mathbf{f} = \tilde{B}^n\tilde{\mathbf{P}}$ in der Darstellung bezüglich des Knotenvektors $\tilde{T} = T \cup \tau$ berechnet.

b) Schreiben Sie ein Matlab-Programm

$$[\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{T}] = \texttt{KnotRem}(\mathbf{P}, T, i),$$

das zu einem gegebenen Spline $\mathbf{f} = B^n\mathbf{P}$ mit Knoten T die Kontrollpunkte des Splines $\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{B}^n\tilde{\mathbf{P}}$ mit Knoten $\tilde{T} = T \backslash T(i)$ berechnet, der $\mathbf{f}$ im folgenden Sinne aproximiert: Wenn man in die Darstellung von $\tilde{\mathbf{f}}$ den Knoten $T(i)$ einfügt, dann ist die Abweichung zwischen den so erhaltenen und den ursprünglich gegebenen Kontrollpunkten minimal im Sinne der Euklidischen Norm. *Hinweis:* Verwenden Sie das Programm `KnotIns`, um eine Matrix I für das Knoteneinfügen aufzustellen.