Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

29.11.2006

7. Übung

Geometrische Datenverarbeitung WS 2006/07

Aufgabe 25: [H]
a) Seien b_j^n und $\tilde{b}_j^n$ die B-Splines der Ordnung n zu den Knotenfolgen T bzw. $\tilde{T} := \alpha T + \beta$, wobei $\alpha \neq 0$. Beweisen Sie mit Hilfe der Marsden-Identität die Beziehung

$$\tilde{b}_j^n(\alpha t + \beta) = b_j^n(t).$$

Gilt etwas Vergleichbares auch für die Basis der abgebrochenen Potenzen?

b) Für Ordnungen $n \geq 2$ definiert man die *Greville-Abszissen* („Mittel der inneren Knoten") gemäß

$$\tau_j^* := \frac{\tau_{j+1} + \cdots + \tau_{j+n-1}}{n-1}.$$

Zeigen Sie, dass die Identität auf dem kanonischen Definitionsgebiet $D(T)$ in der Form $t = \sum_j b_j^n(t)\tau_j^*$ dargestellt werden kann.
c) Sei $\tau_j \in D(T)$ ein Knoten mit $\#j = n-2$. Zeigen Sie, dass dann der Spline $f = B^n P$ die Interpolationseigenschaft $f(\tau_j) = p_{j-1}$ besitzt.

Aufgabe 26: [H]
a) Werten Sie mit Hilfe des de-Boor-Schemas den Spline mit Knoten $T = [0,0,0,1,2,4,5,5,5,5]$ und Kontrollpunkten $P = [-1,-2,2,0,-6,3]^T$ an der Stelle $t_0 = 3$ aus.

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Einfügen eines Knotens genau dem Übergang vom ursprünglichen Kontrollpolygon in die zweite Spalte des Rekursionsschemas entspricht. Dabei werden also genau $n-1$ neue Punkte aus n alten Punkten berechnet. Wie ist zu erklären, dass beim erneuten Einfügen desselben Knotens nur $n-2$ neue Punkte berechnet werden müssen? Mit anderen Worten: Wie ist der Algorithmus zum Einfügen eines Knotens t_0 zu modifizieren, wenn t_0 in der gegebenen Knotenfolge bereits r-fach vorhanden ist?

Aufgabe 27: [M]
a) Gegeben sei ein Spline f der Ordnung n mit ganzzahligen Knoten und Kontrollpunkten P. Geben Sie mit Hilfe des Vorwärtsdifferenzenoperators Δ die Koeffizienten der ersten Ableitung Df und dann der k-ten Ableitung $D^k f$ an.

b) Die Knotenfolge T sei nun beliebig. Zeigen Sie

$$P \geq 0 \Rightarrow f \geq 0, \quad \Delta P \geq 0 \Rightarrow Df \geq 0.$$

c) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass aus $\Delta^2 P \geq 0$ im Allgemeinen nicht $D^2 f \geq 0$ folgt.

Aufgabe 28: [P]
Sei $T = [\tau_1, \ldots, \tau_{n+m}]$ eine nichtentartete Knotenfolge und $\mathbf{f}(t) = \sum_j b_j^n(t)\mathbf{p}_j$ eine Splinekurve über dem Definitionsbereich $D(T) = [\tau_n, \tau_{m+1})$. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm

$$\mathbf{F} = \texttt{DeBoor}(\mathbf{P}, T, S),$$

das $\mathbf{f}$ an den Stellen S mit Hilfe des de Boor-Algorithmus auswertet. Achten Sie darauf, dass auch Argumente außerhalb des kanonischen Definitionsgebiets korrekt verarbeitet werden.