Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

22.11.2006

6. Übung

Geometrische Datenverarbeitung WS 2006/07

Aufgabe 21: [H]
a) Zeigen Sie, dass die B-Splines $b_1^n, \dots, b_n^n$ zur Knotenfolge $T := [0\$n, 1\$n]$ auf dem Definitionsgebiet $D(T) = [0, 1)$ mit den Bernsteinpolynomen der Ordnung n übereinstimmen.

b) Sei $T_n := [0, \dots, n]$. Zeigen Sie, dass für die durch die Rekursion

$$b^1(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad b^{n+1}(t) = \int_{t-1}^{t} b^n(s)\, ds$$

definierte Funktionenfolge gilt: *i)* b^n ist ein Spline der Ordnung n über der Knotenfolge T_n. *ii)* $\operatorname{supp} b^n = [0, n]$. *iii)* $\sum_{j \in \mathbb{Z}} b^n(t - j) \equiv 1$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

[$*$] Sei $c^n(t) := b^n(t + n/2)$ der *zentrierte kardinale B-Spline* der Ordnung n. Bestimmen Sie für $n = 4, 5, 6, \dots$ experimentell oder [$**$] analytisch Konstanten α_n, β_n so, dass

$$c^n(t) \approx \alpha_n \exp(-\beta_n\, t^2)\,.$$

Aufgabe 22: [H]
Verifizieren Sie ausgehend von der Identität

$$D b_j^n = (n-1) \left(\frac{b_j^{n-1}}{|s_j^{n-1}|} - \frac{b_{j+1}^{n-1}}{|s_{j+1}^{n-1}|} \right)$$

die Formeln für die Integration von B-Splines sowie für die Differenziation und Integration von Splines in B-Splineform (Skript Seite 61/62).

Aufgabe 23: [M]
Sei $T = [\tau_1, \dots, \tau_{n+m}]$ ein beliebiger Knotenvektor und

$$\psi_j^n(\tau) := \prod_{i=j+1}^{j+n-1} (\tau_i - \tau)\,.$$

a) Zeigen Sie, dass die Polynome $\psi_{k-n+1}^n, \dots, \psi_k^n$ linear unabhängig sind, sofern $\tau_k < \tau_{k+1}$.

b) Sei wieder $\tau_k < \tau_{k+1}$ und die $n \times n$-Matrix M definiert durch

$$M_{j,\ell} = \psi_{k-n+\ell}^n(\sigma_j)\ , \quad j, \ell = 1 : n\ .$$

Zeigen Sie (ohne Rechnung), dass M invertierbar ist, wenn die Stützstellen $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ paarweise verschieden sind. Wozu lässt sich dieses Resultat verwenden?

Aufgabe 24: [P]
Sei $T = [\tau_1, \dots, \tau_{n+m}]$ eine nichtentartete Knotenfolge und $\mathbf{f}(t) = \sum_j b_j^n(t)\mathbf{p}_j$ eine Splinekurve über dem Definitionsbereich $D(T) = [\tau_n, \tau_{m+1})$. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm

$$\mathbf{F} = \texttt{MarsdenSplVal}(\mathbf{P}, T, S)\ ,$$

das $\mathbf{f}$ an den Stellen S mit Hilfe der Marsden-Identität auswertet.

Hinweise: Arbeiten Sie in einer Schleife die relevanten Segmente $[\tau_k, \tau_{k+1})$ ab. Beim Aufbau der Matrix M gemäß Aufgabe 23 kann durch den Befehl `cumprod` eine Schleife vermieden werden.