Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

18.10.2006

5. Übung

Geometrische Datenverarbeitung WS 2006/07

Aufgabe 17: [H]
Für einen Vektor $P = [p_1, \ldots, p_n]^T$ schreiben wir $P \in \mathbb{P}_m$, wenn es ein Polynom $p \in \mathbb{P}_m$ gibt, sodass $p_j = p(j), j = 1 : n$. Zeigen Sie

$$B^n P \in \mathbb{P}_m \quad \Leftrightarrow \quad P \in \mathbb{P}_m.$$

Hinweis: Differenzieren!

Aufgabe 18: [H]
a) Gegeben sei der Kegelschnitt $K : 2x^2 - xy + 2y^2 + 2x - 2y - 4 = 0$. Bestimmen Sie die rationale quadratische Bézierkurve, die das Intervall $[0, 1]$ auf das im ersten Quadrant liegende Segment von K abbildet und deren Pol auf der x-Achse liegt.

b) Sei $\mathbf{c}_\alpha$ eine Schar rationaler Bézierkurven mit Kontrollpunkten $\mathbf{P}$ und Gewichten $W = U + \alpha V$. Zeigen Sie, dass für festes $t \in \mathbb{R}$ die Punkte $\{\mathbf{c}_\alpha(t) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ alle auf einer Geraden liegen. *Hinweis:* Schreiben Sie $\mathbf{c}_\alpha(t)$ in der Form $\mathbf{c}_\alpha(t) = \lambda(\alpha)\mathbf{q} + (1 - \lambda(\alpha))\mathbf{r}$.

Aufgabe 19: [M]
Zur Schlichtung einer komplizierten Beziehungsgeschichte (Bimmel liebt Bommel, Bommel hasst Bimmel), wird folgendes verfügt: Es werden für die neuen Wohnsitze der beiden zwei Gebiete P und Q festgesetzt. Zunächst darf Bommel seinen Standort in P oder Q frei wählen. Danach darf Bimmel seinen Standort in dem Gebiet, das Bommel nicht gewählt hat, frei wählen. Bimmel möchte Bommel natürlich so nahe wie möglich sein, während Bommel eine möglichst große Distanz zwischen sich und Bimmel bringen möchte. Die Enfernung, die sich schließlich zwischen den beiden ergibt, nennt man den *Hausdorff-Abstand* von P und Q.

a) Übersetzen Sie die Geschichte in die Sprache der Mathematik.

b) Zeigen Sie, dass der Hausdorff-Abstand eine Metrik auf der Menge der kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ ist.

Aufgabe 20: [P]
Schreiben Sie ein Matlab-Programm

$$R = \texttt{BezRoot}(P, \mathit{tol}),$$

das die Nullstellen des Polynoms $c = B^n P$ auf dem Intervall $[0, 1]$ mittels Subdivision eingrenzt. Dabei sei $R = [a_1, b_1; \ldots; a_N, b_N]$ eine Matrix mit zwei Spalten, in deren Zeilen Intervalle $[a_i, b_i]$ der Länge $\leq \mathit{tol}$ stehen, in denen Nullstellen von c liegen können.