Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

08.11.2006

4. Übung

Geometrische Datenverarbeitung WS 2006/07

Aufgabe 13: [H]
a) Füe die Kontrollpunkte einer Bézierkurve $\mathbf{c} = B^n\mathbf{P}$ gelte $\mathbf{p}_1 = \cdots = \mathbf{p}_{m-1} \neq \mathbf{p}_m$. Berechnen Sie

$$\lim_{t\to+0} \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$$

und diskutieren Sie das Ergebnis.
b) Die *Krümung* einer Kurve $\mathbf{c}$ in $\mathbb{R}^d$ berechnet sich nach der Formel

$$\kappa = \frac{\big\|\mathbf{c}''\langle\mathbf{c}',\mathbf{c}'\rangle - \mathbf{c}'\langle\mathbf{c}',\mathbf{c}''\rangle\big\|}{\|\mathbf{c}'\|^4}.$$

Sei $\mathbf{c} = B^n\mathbf{P}$ eine ebene Bézierkurve der Ordnung $n \geq 3$, deren erste drei Kontrollpunkte durch $\mathbf{p}_1 = [0,0],\ \mathbf{p}_2 = [1,0],\ \mathbf{p}_3 = [x,y]$ gegeben sind. Bestimmen Sie $\kappa(0)$ in Abhängigkeit von x und y.

Aufgabe 14: [H]
Der Übergang von Kontrollpunkten $\mathbf{P}$ zu $\mathbf{P}_\ell, \mathbf{P}_r, \mathbf{P}_{a,b}$ für die Unterteilung

$$B^n(st)\mathbf{P} = B^n(t)\mathbf{P}_\ell, \quad B^n(s+t(1-s))\mathbf{P} = B^n(t)\mathbf{P}_r, \quad B^n(a+t(b-a))\mathbf{P} = B^n(t)\mathbf{P}_{a,b}$$

wird durch Matrizen $M_\ell(s), M_r(s), M_{a,b}(s)$ beschrieben, also

$$\mathbf{P}_\ell = M_\ell(s)\mathbf{P}, \quad \mathbf{P}_r = M_r(s)\mathbf{P}, \quad \mathbf{P}_{a,b} = M_{a,b}(s)\mathbf{P}.$$

a) Geben Sie für $s = 1/2$ die Matrix M_ℓ explizit an.
b) Drücken Sie M_r mittels M_ℓ aus.
c) Drücken Sie $M_{a,b}$ mitttels M_ℓ und M_r aus.

Aufgabe 15: [M]
Sei $c = B^nP$ ein Polynom der Ordnung n und $\tilde{c} = B^n\tilde{P}$ das Segment von c, das dem Intervall $[a,b]$ entspricht, also $\tilde{c}(t) = c(a+th), h = b-a$. Ferner sei $\tilde{p}$ das Kontrollpolygon zu $\tilde{c}$.
a) Beweisen Sie die Abschätzung

$$\|\tilde{c} - \tilde{p}\| \leq \frac{h^2(n-1)}{8}\,\|\Delta^2 P\|_\infty.$$

b) Geben Sie eine Abschätzung für den Euklidischen Abstand zwischen einer Bézierkurve $\mathbf{c}$ in $\mathbb{R}^d$ und deren Kontrollpolygon $\mathbf{p}$ an,

$$\max_{t\in[0,1]} \|\mathbf{c}(t) - \mathbf{p}(t)\|_2 \leq \,?$$

Aufgabe 16: [P]
a) Schreiben Sie ein rekursives MATLAB-Programm

$$\texttt{BezPlot}\,(\mathbf{P}, \mathit{tol}),$$

das die ebene Bézierkurve $\mathbf{c}$ mit Kontrollpunkten $\mathbf{P}$ plottet. Dabei soll das Kontrollpolygon $\mathbf{p}$ geplottet werden, wenn der Euklidische Abstand zwischen Kurve und Kontrollpolygon punktweise kleiner als eine vorgegebene Toleranz *tol* ist,

$$\max_{\in[0,1]} \|\mathbf{c}(t) - \mathbf{p}(t)\|_2 \leq \mathit{tol}.$$

Anderenfalls soll die Bézierkurve an der Stelle $t_0 = 1/2$ unterteilt werden. Versuchen Sie, die entstehende Segmentierung der Kurve geeignet zu visualisieren (z.B. durch verschiedene Farben, Markierung der Segmentgrenzen, etc.).