Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

01.11.2006

3. Übung

Geometrische Datenverarbeitung WS 2006/07

Aufgabe 9: [H]
Gegeben sei die kubische Kurve

$$\mathbf{c}(t) = [3t^3 - 3t^2 - 3t,\, 3t^3 + 3t^2 - 3t], \quad t \in [0,1].$$

a) Wandeln Sie die Kurve in Bézierform um.

b) Bestimmen Sie $\mathbf{c}(2/3)$ mit Hilfe des de Casteljau-Algorithmus.

c) Bestimmen Sie $D\mathbf{c}$ und $D^{-1}\mathbf{c}$ in Bézierform und geben Sie die Tangente an $\mathbf{c}$ im Punkt $\mathbf{c}(2/3)$ an. Finden sich die Daten der Tangente auch im de Casteljau-Schema?

d) Skizzieren Sie die Kurve.

[*] Beweisen Sie die Beobachtung aus Teil c) im Allgemeinen.

Aufgabe 10: [H]
a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von b_{j+1}^{n+1} auf dem Intervall $[0,1]$.

b) Beweisen Sie die Produktformel

$$\binom{n+m}{k+\ell} b_{k+1}^{n+1} b_{\ell+1}^{m+1} = \binom{n}{k}\binom{m}{\ell} b_{k+\ell+1}^{n+m+1}.$$

c) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 b_k^n(t)\,dt = \frac{1}{n}, \quad 1 \le k \le n.$$

d) Bestimmen Sie die Gram-Matrix G^n bezüglich der Bernsteinpolynome der Ordnung n und dem L^2-Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

[*] Vergleichen Sie numerisch die Konditionszahlen der Gramschen Matrizen bezüglich der Bernsteinpolynome und der Monombasis für verschiedene Werte der Ordnung n.

Aufgabe 11: [M]
a) Sei $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1; \ldots; \mathbf{p}_n]$. Zeigen Sie, dass die konvexe Hülle von $\mathbf{P}$ gleich der Menge aller Konvexkombinationen von $\mathbf{P}$ ist.

b) Beweisen oder widerlegen Sie:

- i) Die Vereinigung konvexer Mengen ist konvex.
- ii) Der Schnitt konvexer Mengen ist konvex.
- iii) Das affine Bild einer konvexen Menge ist konvex.
- iv) Eine offene Kugel in $\mathbb{R}^n$ ist konvex.

Aufgabe 12: [P]
a) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm

$$\mathbf{C} = \texttt{DeCasteljau}(\mathbf{P}, T),$$

das die Werte $\mathbf{C}$ der Bézierkurve mit Kontrollpunkten $\mathbf{P}$ an den Stellen $T = [t_1, \ldots, t_m]$ mittels des de Casteljau-Algorithmus bestimmt.

b) Sei $\mathbf{c}(t) = B^n(t)\mathbf{P}$. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm

$$\mathbf{Q} = \texttt{BezDiff}(\mathbf{P}, m),$$

das für beliebige ganze Zahlen $m < n$ die Kontrollpunkte $\mathbf{Q}$ der Kurve $D^m\mathbf{c}(t) = B^{n-m}(t)\mathbf{Q}$ berechnet.