Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

25.10.2006

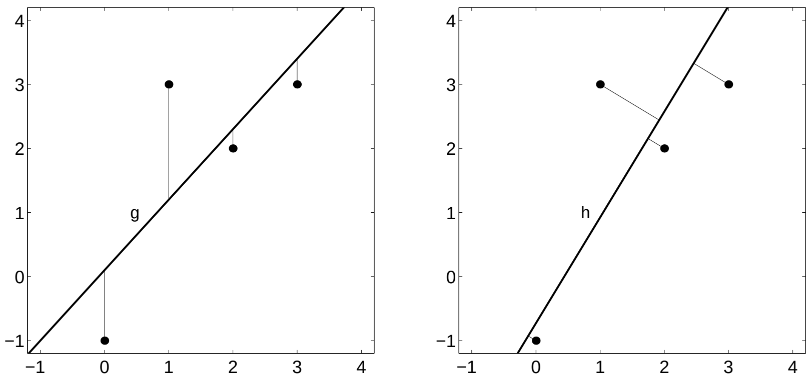
2. Übung

Geometrische Datenverarbeitung WS 2006/07

Aufgabe 5: [H]

a) Berechnen Sie die Ausgleichsgerade g zu den Punkten $(0,-1),(1,3),(2,2),(3,3)$.

b) Bestimmen Sie eine Gerade h so, dass die Summe der quadrierten Euklidischen Abstände zwischen den Punkten aus Teil a) und der Geraden h minimal wird. Vergleichen Sie g und h. *Hinweis:* Hessesche Normalform, Lagrange-Multiplikator, verallgemeinertes Eigenwertproblem.



Aufgabe 6: [H]

a) Zeigen Sie, dass die *Chebyshev-Polynome*

$$q_k(t) := \cos(k \arccos t), \quad t \in [-1,1],\ k \in \mathbb{N}_0$$

tatsächlich Polynome der Ordnung $k+1$ sind, indem Sie die Rekursionsformel

$$q_{k+1} = 2tq_k - q_{k-1}$$

verifizieren und q_0, q_1 explizit berechnen. *Hinweis:* Setzen Sie $\cos u = t$ und verwenden Sie

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

b) Geben Sie die Polynome $q_0,\dots,q_3$ in Monomform an und skizzieren Sie diese. Was fällt Ihnen auf?

c) Aus der Rekursionsformel folgt, dass q_k für $k \geq 1$ den führenden Koeffizienten 2^{k-1} hat, also $q_k(t) = 2^{k-1}t^k + \cdots$. Zeigen Sie, dass q_k unter allen Polynomen mit diesem führenden Koeffizienten die kleinste Maximumnorm hat.

d) Verifizieren Sie, dass die Chebyshev-Punkte T_k^{ch} (vgl. Skript, Seite 9) die Nullstellen von q_k sind und geben Sie damit eine Produktdarstellung von q_k an.

Aufgabe 7: [M]
a) Zeigen Sie, dass die Chebyshev-Polynome gemäß Aufgabe 6 bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

orthogonal sind, d.h. $\langle q_k, q_\ell \rangle = 0$ für $k \neq \ell$.

b) Bestimmen Sie $\langle q_k, q_k \rangle$ und geben Sie die Gram-Matrix für die Basis $\{q_0, \ldots, q_{n-1}\}$ von $\mathbb{P}_n$ an.

c) Wie lautet die Lösung des Approximationsproblems

$$\|f - p\| \to \min, \quad p \in \mathbb{P}_n$$

für die von dem obigen Skalarprodukt induzierte Norm?

d[*]) Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen p und der Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion $\tilde{f}(u) := f(\cos u)$ her.

Aufgabe 8: [P]
Gegeben seien die Punkte $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m \in \mathbb{R}^2$. Die konvexe Hülle dieser Punkte wird durch ein Polygon mit Eckpunkten $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k$ berandet. Schreiben Sie hierzu ein Matlab-Programm

$$\mathbf{Q} = \texttt{ConvexHull}(\mathbf{P}),$$

wobei $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ Matrizen der Dimension $(m \times 2)$ bzw. $(k \times 2)$ sind, in denen die Punkte $\mathbf{p}_i$ bzw. $\mathbf{q}_j$ zeilenweise gespeichert sind. *Hinweis:* Der Befehl `atan2` kann nützlich sein.