Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

24.01.2007

12. Übung

Geometrische Datenverarbeitung WS 2006/07

Aufgabe 44: [H] Ein Vektor $a = [a_0, \ldots, a_{n-1}]$ heißt *symmetrisch*, wenn $a_j = \overline{a}_{n-j}$ für alle $j \in \mathbb{Z}_n$.

a) Zeigen Sie: a reell $\Leftrightarrow$ $\hat{a}$ symmetrisch, und folgern Sie daraus: a symmetrisch $\Leftrightarrow$ $\hat{a}$ reell.

b) Geben Sie für den Fall, dass a reell und symmetrisch ist, eine Formel für $\hat{a}$ an, in der neben a nur die Cosinus-Funktion vorkommt.

Aufgabe 45: [H] Sei $A(z) := a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}$ ein reelles Polynom mit Koeffizientenvektor $a = [a_0, \ldots, a_{n-1}]$, dann stimmen die Werte von A an den Punkten $w^0, w^{-1} \ldots, w^{-(n-1)}$ mit $\hat{a}$ überein,

$$A(w^{-k}) = \hat{a}_k.$$

a) Geben Sie ausgehend von dieser Beobachtung einen Algorithmus

$$c = \texttt{Prod}(a, b)$$

an, mit dem das Produkt $C(z) = A(z)B(z)$ zweier Polynome $A(z)$ und $B(z)$ der Ordnung n bzw. m mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation berechnet werden kann. *Hinweis:* Bringen Sie die Vektoren durch Verwendung von Nullen auf geeignete Länge.

b) Seien nun p und q die Ziffernfolgen zweier natürlicher Zahlen. Wie lässt sich dann mit Hilfe des Verfahrens aus Teil a) die Ziffernfolge r des Produkts der beiden Zahlen berechnen?

Aufgabe 46: [M] Für $n = 2\tilde{n}$ und den Spaltenvektor $a = [a_0, \ldots, a_{n-1}]^{\mathrm{t}}$ definieren wir die Vektoren halber Länge g, u, sowie die Diagonalmatrix W durch

$$g := \begin{bmatrix} a_0 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-2} \end{bmatrix}, \quad u := \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} w^0 & & & 0 \\ & w^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & w^{-(\tilde{n}-1)} \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie:

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} \hat{g} + W\hat{u} \\ \hat{g} - W\hat{u} \end{bmatrix}.$$

b) Bezeichne $A(\tilde{n})$ die Anzahl der Multiplikationen, die jeweils zur Berechnung der DFT von g und u benötigt werden. Wieviele Multiplikationen $A(n)$ sind dann zur Berechnung von $\hat{a}$ gemäß der obigen Formel nötig?

c) Sei nun $n = 2^k$ eine Zweierpotenz. Dann lässt sich mit Hilfe der obigen Formel ein rekursives Verfahren zur Berechnung von $\hat{a}$ angeben, das schließlich auf die DFT von Vektoren der Länge 1 zurückführt, und dafür ist trivialerweise $\hat{a} = a$ und $A(1) = 0$. Dieses Verfahren nennt man die *schnelle Fourier Transformation*. Bestimmen Sie mit der Formel aus Teil b) zunächst die Werte $A(2), A(4), \ldots, A(64)$ und geben Sie dann eine Formel für $A(n), n \in \mathbb{N}$, an. Vergleichen Sie das Resultat mit der direkten Berechnung gemäß der Definition.

Aufgabe 47: [P] Schreiben Sie ein (z.B. rekursives) Matlab-Programm

$$\hat{a} = \texttt{FFT}(a)$$

zur Berechnung von $\hat{a}$ mittels der schnellen Fourier Transformation. Dabei sei die Länge des Spaltenvektors a eine Zweierpotenz. Der Aufruf der eingebauten Matlab-Routine `fft` ist verboten. **Das schnellste Programm gewinnt einen Preis.**