Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
09.02.2007

14. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

Ist X ein Banachraum endlicher Dimension, so ist jeder injektive Operator auf X automatisch auch surjektiv und umgekehrt. Das gilt in beliebigen Banachräumen nicht. Geben Sie Beispiel von beschränkten, linearen Operatoren auf einem Banachraum an, die injektiv aber nicht surjektiv, bzw. surjektiv aber nicht injektiv sind.

Lösung: Die Aussage über endlichdimensionalen Räumen ist aus LinAlg I bekannt. Auf ℓ^2 ist das Linksshift nicht injektiv aber surjektiv, und das Rechtshift ist injektiv aber nicht surjektiv.

Aufgabe G2

(a) Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und nicht leer. Zeigen Sie dass, es einen stetigen Operator T auf ℓ^2 gibt, für den $\sigma(T) = K$.
Hinweis: Multiplikatoren!

(b) Sei $X := L^2((0,1))$ und $Af := f'$ mit $D(A) := \{f \in H^1((0,1)) : f(1) = 0\}$. Zeigen Sie, dass A abgeschlossen ist. Bestimmen Sie das Spektrum von A.

Lösung:

(a) Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und nicht leer. Wir nehmen eine abzählbare dichte Menge $\{m_1, m_2, \dots\} \subseteq K$ (siehe Satz 2.3). Wir setzen $T(x_n) = (m_n x_n)$. Dann gilt $\sigma(T) = \overline{\{m_1, m_2, \dots\}} = K$ (siehe Aufgabe H1 auf Übungsblatt 13).

(b) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig. Aus Analysis wissen wir, was die Lösungen des Problems $\lambda f - f' = g$ sind: $f(x) = \int_x^1 e^{\lambda(x-s)} g(s)\,\mathrm{d}s$, so ist $f(1) = 0$ auch (Variation der Konstanten). Dieses Argument gilt allerdings für $g \in C([0,1])$. Für $g \in L^2((0,1))$ ist das obige f absolut stetig, also gilt $\lambda f - f' = g$ fast überall. Ferner ist das obige f die eindeutige Lösung zu unserer Gleichung, also ist $Tg := f$ ein wohldefinierter linearer Operator, welcher auch stetig ist, denn $\|Tg\|_{L^2} \leq \|e^{\lambda(x-\cdot)}\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}$.

Damit ist T die stetige Inverse von $\lambda - A$, und so gilt $\lambda \in \varrho(A)$. Dies zeigt $\sigma(A) = \emptyset$. Da die Resolventenmengen nicht leer ist, folgt die Abgeschlossenheit von A.

Aufgabe G3

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ heißt *schnell fallend*, falls

$$\lim_{|x|\to\infty} x^\alpha f(x) = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d.$$

Der Raum

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : D^\alpha f \text{ schnell fallend für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}.$$

heißt Schwartzraum.

(a) Geben Sie Funktionen f an, die in $\mathcal{S}$ liegen.

(b) Zeigen Sie, dass $\Psi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

Lösung:

(a) z.B. e^{-x^2}.

(b) Sei $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ ein Polynom. Nach Voraussetzung ist $D^\alpha pf \in L^1(\mathbb{R}^d)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, d.h. $\widehat{D^\alpha pf} \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Nach Satz 18.5 gilt

$$x^\beta D^\alpha \hat{f} = x^\beta \widehat{(-ix)^\alpha f} = -i^{|\beta|}(i\xi)^\beta \widehat{(-ix)^\alpha f} = -i^{|\beta|} D^\beta \widehat{(-ix)^\alpha f}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d,$$

d.h. $x^\beta D^\alpha \hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Also ist $\hat{f} \in S$.