Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
02.02.2007

13. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei $X := C([0,1])$ und $A : X \supset C^1([0,1]) \to X$, $Af = f'$. Berechnen Sie $\sigma(A)$ und $P\sigma(A)$.

Lösung: Offenbar löst $f_\lambda(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ die Gleichung $\lambda f_\lambda - f'_\lambda = 0$, d.h. $P\sigma(A) = \sigma(A) = \mathbb{C}$

Aufgabe G2

Es sei $X = C([0,1])$ und wir definieren für $g \in C([0,1])$ den Operator

$$M_g : X \to X, \quad f \mapsto gf.$$

(a) Zeigen Sie, dass $M_g \in \mathcal{L}(X)$ gilt und die Abbildung $\Phi : X \to \mathcal{L}(X)$, $g \mapsto M_g$ eine Isometrie ist.

(b) Bestimmen Sie zu vorgegebenem g das Spektrum von M_g

(c) Für $\lambda \in \varrho(M_g)$ geben Sie die Resolvente $R(\lambda, M_g)$ an.

(d) Unter welchem Annahme an g ist $P\sigma(M_g) \neq \emptyset$.

Lösung:

(a) Klar ist $M_g \in \mathcal{L}(X)$. Die Abbildung Φ ist linear, denn z.B. $\Phi(f+g)h = M_{f+g}h = (f+g)h = fh + gh = M_f h + M_g h$. Ferner ist Φ eine Isometrie, denn $\|\Phi g\| = \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \|gf\|_\infty \le \|g\|_\infty$, und $\|(\Phi g)\mathbf{1}\|_\infty = \|g\|_\infty$ (hier ist $\mathbf{1}$ die konstante 1 Funktion).

(b) (c) Das Spektrum von M_g ist $g([0,1])$, denn für $\lambda \notin g([0,1])$ gilt $1/(\lambda - g) \in C([0,1])$ ($g([0,1])$ ist kompakt!), und so ist $M_{1/(\lambda-g)} \in \mathcal{L}(X)$ die Inverse von $\lambda - M_g$.
Falls $\lambda \in g([0,1])$ ist, existiert ein $x \in [0,1]$ mit $\lambda - g(x) = 0$, d.h. $((\lambda - M_g)f)(x) = 0$ für alle $f \in X$. Daher ist $\lambda - M_g$ nicht surjektiv.

(d) Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gehört zu $P\sigma(M_g)$ genau dann, wenn $\{x \in [0,1] : g(x) = \lambda\}$ eine offene Umgebung U enthält.
Wähle $f \in X$ mit supp $f \subset U$. Dann gilt:

$$\lambda f - M_g f = 0,$$

d.h. $\lambda \in P\sigma(M_g)$.
Umgekehrt, sei λ ein Eigenwert und f ein Eigenvektor. Da $0 \neq f \in X$ ist, existiert eine offene Menge U mit $f \neq 0$. Außerdem gilt

$$\lambda f - gf = 0,$$

d.h. $g = \lambda$ in U.

Aufgabe G3

Es sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $R\sigma(T) = P\sigma(T')$.

(b) Wenn T eine Isometrie ist, so gilt $A\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

Lösung:

(a) Nach Hahn–Banach ist $\operatorname{im}(\lambda - T)$ nicht dicht genau dann, wenn ein $0 \neq \varphi \in X'$ exisitert mit $\varphi|_{\operatorname{im}(\lambda - T)} = 0$. Die letzte Aussage ist aber zu $\lambda \in P\sigma(T')$ äquivalent. So folgt die Behauptung.

(b) Sei $\lambda \in A\sigma(T)$, d.h. existiert eine Folge $(x_n) \subseteq X$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|\lambda x_n - Tx_n\| \to 0$. Es gilt $\big||\lambda|\|x_n\| - \|Tx_n\|\big| \leq \|\lambda x_n - Tx_n\| \to 0$, also $1 = \|x_n\| = \|Tx_n\| \to \|\lambda\|$, d.h. $|\lambda| = 1$.

Hausübung

Aufgabe H1

Es sei $X := \ell^2$, und $(m_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und wie definieren den lineare Operator $M(x_n) = (m_n x_n)$ mit maximalem Definitionsbereich, d.h. mit

$$D(M) := \{(x_n) \in \ell^2 : (m_n x_n) \in \ell^2\}.$$

Ferner seien die Operatoren R, L definiert durch

$$\begin{aligned} R : (x_1, x_2, \dots) &\quad\mapsto\quad (0, x_1, x_2, \dots) \\ L : (x_1, x_2, \dots) &\quad\mapsto\quad (x_2, x_3, \dots). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie den Spektralradius, das Punktspektrum, das approximative Punktspektrum und das Residualspektrum dieser Operatoren.

Lösung: M ist beschränkt genau dann, wenn $(m_n) \in \ell^\infty$. In diesem Fall ist $r(M) = \|(m_n)\|_\infty$. Klar ist $P\sigma(M) = \{m_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wir zeigen $\sigma(M) = \overline{\{m_n : n \in \mathbb{N}\}} =: S$. Hier ist "$\supseteq$" klar, de das Spektrum abgeschlossen ist. Sei jetzt $\lambda \notin S$. Dann ist der Multiplikator $N(x_n) := (x_n/(\lambda - m_n))$ beschränkt und die Inverse von $\lambda - M$. Also gilt "$\subseteq$" auch. Da $\partial\sigma(M) \subset A\sigma(M)$, gilt $A\sigma(M) = \sigma(M)$. Es gilt $M' = M$, d.h. $R\sigma(M) = P\sigma(M') = P\sigma(M)$.

Es gilt $\|R\| = \|L\| = 1$ also $r(T) \leq 1$. Es gilt $\lambda(x_n) - L(x_n) = (\lambda x_n - x_{n+1})$, also $(\lambda - L)(x_n) = 0$ heißt $\lambda x_n - x_{n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also $x_{n+1} = \lambda^{n-1}x_1$. Für $x_1 \neq 0$ liegt dies in ℓ^2 nur dann, wenn $|\lambda| < 1$. Also $P\sigma(L) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$.

Es gilt $\lambda(x_n) - R(x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2 - x_1, \lambda x_3 - x_2, \cdots)$, also für $\lambda \neq 0$ heißt $(\lambda - R)(x_n) = 0$ dass $x_1 = 0$ und so induktiv $x_n = 0$. Ist $\lambda = 0$, folgt sofort auch $(x_n) = 0$. Dies Zeigt $P\sigma(R) = \emptyset$. Wir sehen $\{\lambda : |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma(L) \subseteq \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$. Also folgt $\sigma(L) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$, denn das Spektrum abgeschlossen ist. So folgt auch $\sigma(R) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$.

Aus Aufgabe G3 (a) folgt $R\sigma(R) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$ und $R\sigma(L) = \emptyset$. Der Operator R ist eine Isometrie, also liefert Aufgabe G3 (b), dass $A\sigma(R) \subseteq \{\lambda : |\lambda| = 1\}$, damit ist auch $A\sigma(R) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$. Da $\{\lambda : |\lambda| \leq 1\} = \sigma(L) = R\sigma(L) \cup A\sigma(L) = \emptyset \cup A\sigma(L)$, folgt $A\sigma(L) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$.

Aufgabe H2

Sei X ein Banchraum.

(a) Sei $A : X \supset D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator und $\lambda - A$ bijektiv. Zeigen Sie, dass $\lambda \in \rho(A)$.

(b) Sei $A : X \supset D(A) \to X$ ein Operator und $\rho(A) \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dasst A abgeschlossen ist.

Lösung:

(a) Man zeigt leicht, dass $(\lambda - A)^{-1}$ abgeschlossen ist. Daher folgt mit dem Satz des abgeschlossenen Graphen die Stetigkeit von $(\lambda - A)^{-1}$, d.h. $\lambda \in \rho(A)$.

(b) Definition nachrechen und die Stetigkeit der Resolvente verwenden.