Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
26.01.2007

12. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

Seien X, Y Banachräume. Zeigen Sie die folgende Aussagen.

(a) Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ist abgeschlossen.

(b) gr (A) ist ein Unterraum von $X \times Y$.

(c) A ist abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ gr (A) ist abgeschlossen in $X \times Y$.

(d) Sei $A : X \supset D \to Y$ linear. Dann ist A abgeschlossen genau dann wenn D versehen mit der Graphnorm $\|x\|_A := \|x\|_X + \|Ax\|_Y$ ein Banachraum ist.

(e) Der Operator $A : (D, \|\cdot\|_A) \to Y$ ist stetig.

Lösung:

(a) Sei $x_n \in X$ mit $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$. Dann gilt $Tx_n \to Tx$, da T stetig ist. Also ist $Tx = y$.

(b) Trivial, denn A ist linear.

(c) $\Longrightarrow$: Sei $D \ni x_n \to x$ und $Ax_n \to y$. Dann $(x_n, Ax_n) \to (x, y)$, also ist $(x, y) \in$ gr (A), d.h. $y = Ax$. Die umgekehrte Implikation geht genauso.

(d) Sei $\Phi : (D, \|\cdot\|_A) \to \text{gr}\,(A) \subseteq X \oplus_1 Y$, $\Phi(x) := (x, Ax)$. Dann ist Φ ein isometrischer Isomorphismus. Also ist auch D ein Banachraum gdw. gr (A) abgeschlossen ist.

(e) Für $x \in D$ gilt $\|Ax\| \leq \|x\| + \|Ax\|$.

Aufgabe G2

Sei X ein normierter Vektorraum, $M \subseteq X$ und $M' \subseteq X'$. Beweisen Sie folgende Aussagen

(a) M ist beschränkt genau dann, wenn für jede $\varphi \in X'$ die Menge $\{|\varphi(x)| : x \in M\}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist.

(b) Jede schwach konvergente Folge ist beschränkt.

(c) Ist X ein Banachraum, so ist M' genau dann in X' beschränkt, wenn die Menge $\{|\varphi(x)| : \varphi \in M'\}$ für alle $x \in X$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist.

Lösung:

(a) Sei $i : X \to X''$ die kanonische Einbettung. Dann ist $\|i(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in X$. Es reicht also zu zeigen, dass $\{i(x) : x \in M\} \subseteq X''$ beschränkt ist. Dazu verwendet man das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit auf X'.

(b) Folgt aus (a), denn für eine schwach konvergente Folge $(x_n) \subseteq X$ und jedes $\varphi \in X'$ ist $\{\varphi(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt.

(c) Verwende das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.

Aufgabe G3

Geben Sie Beispiele für eine Folge (T_n) von stetigen linearen Operatoren an, die punktweise aber nicht in der Operatornorm konvergieren.

Lösung: Sei $\{e_n\}$ eine ONB in ℓ^2. Wir betrachten die Projektion $P_n : \ell^2 \to \ell^2$, $P_n x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$. Dann gilt $P_n x \to x$ für alle $x \in X$, aber die Operatoren P_n sind kompakt, also $P_n \not\to Id$ bzgl. der Operatornorm.

Hausübung

Aufgabe H1

(a) In dem Banachraum $C([0,1])$ betrachten wir den lineare Operator A mit

$$A : D_1 \to C([0,1]), D_1 := C^1([0,1]) \text{ und } Af := f' \text{ für } f \in D_1;$$
$$A : D_2 \to C([0,1]), D_2 := C^\infty([0,1]) \text{ und } Af := f' \text{ für } f \in D_2;$$

Untersuchen Sie die beiden Operatoren (A, D_1) und (A, D_2) auf Abgeschlossenheit.

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und von der Klasse C^2, $D(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ und $\Delta : D(\Delta) \to L^2(\Omega)$ der Dirichlet-Laplace-Operator. Zeigen Sie, dass Δ abgeschlossen ist, aber NICHT zu einem stetigen Operator auf $L^2(\Omega)$ fortgesetzt werden kann.

Lösung:

(a) Der Operator (A, D_1) ist abgeschlossen: siehe Analysis I. Der Operator (A, D_2) ist nicht abgeschlossen: sei $f \in C^1([0,1]) \setminus C^\infty([0,1])$. Dann existiert eine Folge von Polynomen (p_n) mit $p_n \to f'$ in sup-norm (Satz von Weierstraß). Dann $\int_0^x p_n \to \int_0^x f' = f(x) - f(0)$, also gilt für $g_n(x) := \int_0^x p_n + f(0)$ $g_n \to f$ und $g_n' \to f'$ aber $f \notin D_2$.

(b) Nach Vorlesung gilt:

$$c\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^2(\Omega)}, \quad u \in D(\Delta).$$

Da $(D(\Delta), \|\cdot\|_{H^2(\Omega)})$ ein Banachraum ist, ist auch $(D(\Delta), \|\cdot\|_\Delta)$ ein Banachraum, d.h. Δ ist abgeschlossen.

Wähle $\Omega = B(0,1)$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ und setze $\varphi_n(x) := \varphi(nx)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\|_{L^2(\Omega)} &= n^{-\frac{d}{2}}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ \|\Delta\varphi_n\|_{L^2(\Omega)} &= n^{2-\frac{d}{2}}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Daher kann Δ nicht zu einem stetigen Operator fortgesetzt werden. Dieser Beweis impliziert, dass Δ auf KEINER offenen Menge zu einem stetigen Operator fortgesetzt werden kann.

Aufgabe H2

Zeigen Sie: ein Banachraum X ist entweder von endlichen Dimension, oder jede Basis ist überabzählbar.

Lösung: Sei $\dim X = \infty$ und $e_n \in X$ für $n \in \mathbb{N}$. Setze $X_n = \operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_n\}$. Dann ist $\dim X_n < \infty$, also ist X_n abgeschlossen. Dies zeigt, dass $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$ nicht gelten kann, da X_n nirgends dicht ist (denn es hat leeres Inneres). Also gibt es in X keine abzählbare Basis.