Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2006/07
19.01.2007

# 11. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Diskussion, mündlich)

Verdeutlichen Sie sich die Beweisidee des Satzes 13.1. Wieso liefert der Beweis keine Aussage in der Nähe des Randes?

**Aufgabe G2**

Sei $W_1 \subset \Omega$ mit $\overline{W_1} \subset \Omega$, $u \in H^1(\Omega)$, $\xi \in C_c^\infty(W_1)$ mit $\xi \geq 0$, $v = -D_k^{-h}(\xi^2 D_k^h u)$ (vgl. Vorlesung) und

$$A := \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega a_{ij} \partial_i v \partial_j u.$$

Zeigen Sie, dass

$$A \geq \frac{\alpha}{2} \|\xi D_k^h \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - C \|\nabla u\|_{L^2(W_1)}^2,$$

mit einer von $u$ unabhängigen Konstante $C > 0$ und der Elliptizitätskonstante $\alpha$.

*Hinweis*: Zeigen Sie zunächst

(a) $\langle v, D_k^{-h} w \rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle D_k^h v, w \rangle_{L^2(\Omega)}$, $v, w \in L^2(\Omega)$, $|h| < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} v, \partial\Omega)$.

(b) $D_k^h(vw) = v_k^h D_k^h w + w D_k^h v$, $v, w \in L^2(\Omega)$ mit $v_k^h(x) = v(x + he_k)$.

**Lösung:** Siehe Evans, Partial Differential Equations, Kapitel 6.3.1, Thm. 1.

**Aufgabe G3** (Neumann–Randbedingung)

Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt mit $C^1$-Rand.
Seien $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i, j \leq d$ und $a_0 \in C(\overline{\Omega})$, $a_0(x) \geq 0$ für jede $x \in \Omega$. Wir setzen die Elliptizitätsbedingung voraus:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > \alpha |\xi|^2, \qquad \forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

für ein $\alpha > 0$. Das Ziel ist das das folgende Problem, das so genannte Neumann–Problem, zu lösen

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_j \Big( a_{ij} \partial_i u \Big) + a_0 u &= f \quad \text{in } \Omega \\ -\sum_{j=1}^{d} \nu_j \Big( \sum_{i=1}^{d} a_{ij} \partial_i u \Big) &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{NP}$$

(a) Erfüllt die Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ (NP), so heißt $u$ *klassische Lösung* von (NP). Eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ heißt *schwache Lösung* von (NP), falls

$$a(\varphi, u) = \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \partial_j \varphi \partial_i u + \int_\Omega a_0 \varphi u = -\int_{\partial\Omega} \varphi g \, \mathrm{d}\sigma + \int_\Omega \varphi f, \quad v \in H^1(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass jede klassische Lösung auch eine schwache Lösung ist, und umgekehrt ist eine schwache Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ immer auch eine klassische Lösung.

(b) Wir betrachten nun die homogene Randbedingung, d.h. $g = 0$. Beweisen Sie, dass eine eindeutige, schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ zu (NP) existiert, falls $a_0(x) \geq \alpha_0 > 0$. Ferner gibt es eine von $f$ unabhängige Konstante $C$, so dass die Lösung $u$ die Abschätzung $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$ erfüllt.

*Hinweis* Eine schwache Lösung existiert auch, falls $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ und $a_0 \in L^\infty(\Omega)$.

(c) Sei jetzt $a_0 = 0$, $g = 0$ und $\int_\Omega f = 0$ (und $\Omega$ zusammenhängend). Setze $M := \big\{ u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u = 0 \big\}$. Zeigen Sie, dass die Lösungen des elliptischen Minimumproblems auch Lösungen von (NP) sind. Diese Lösungen sind bis auf Addition einer Konstante eindeutig bestimmt.

(d) Angenommen, dass es überhaupt ein $u_0 \in BC^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ gibt, die die Randbedingung in (NP) erfüllt, zeigen Sie, dass (NP) eine eindeutige schwache Lösung besitzt, falls die in (b) an die Koeffizienten gestellte Bedingungen erfüllt sind.

*Hinweis:* Die folgende Aussagen sind bekannt und können ohne Beweis verwendet werden.

(a) **(Äußere Normale)** Es existiert eine stetige Funktion $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^d$, so dass für jedes $x \in \partial\Omega$ der Vektor $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_d(x))$ der äußere Normalenvektor von $\partial\Omega$ in Punkt $x$ ist. Ferner gilt $|\nu(x)| = 1$.

(b) **(Randintegral)** Für ein $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ ist das Randintegral von $f$ definiert durch

$$\int_{\partial\Omega} f \, \mathrm{d}\sigma,$$

wobei $\sigma$ das Oberfläche-Maß bezeichnet.

(c) **(Gauß–Ostrogradsky-Theorem)** Sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann gilt

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\nu_i\,\mathrm{d}\sigma \qquad \text{für } i = 1,\dots,d.$$

(d) **(Poincaré-Ungleichung)** Es gilt:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad u \in M.$$

**Lösung:**

(a) Partielle Integration.

(b) $a$ ist stetig und koerziv, da

$$a(u,u) \ge \alpha(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha_0\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \ge \alpha'\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Daher existiert eine eindeutige, schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von (NP) und die gewünschte Abschätzung gilt (vgl. Dirichlet-Randbedingungen).

(c) Nach Satz 12.9 besitzt das Minimumproblem eine eindeutige Lösung $u \in M$ (Beachte: Aus der Poincaré-Ungleichung folgt, dass die Bedingung in Satz 12.9(c) erfüllt ist). Wie in Korollar 12.10 erhalten wir, dass das Minimum eine schwache Lösung von (NP) ist.
Seien $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ zwei schwache Lösungen von (NP). Dann gilt:

$$a(\varphi, u_1 - u_2) = 0, \quad \varphi \in H^1(\Omega),$$

insbesondere gilt $\|\nabla(u_1-u_2)\|_{L^2(\Omega)} \le \alpha a(u_1-u_2, u_1-u_2) = 0$, d.h. $u_1 - u_2 \equiv K$ für ein $K \in \mathbb{R}$. Offenbar ist $u_1 + k$ für jedes $k \in \mathbb{R}$ eine schwache Lösung von (NP).

(d) Setze $\tilde{f} = -\sum_{i,j=1}^d \partial_j\Big(a_{ij}\partial_i u_0\Big) + a_0 u_0$ und löse

$$a(\varphi, u) = \langle \varphi, f - \tilde{f}\rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \varphi \in H^1(\Omega).$$

Dann ist $\varphi + u_0$ eine schwache Lösung von (NP).

## Hausübung

**Aufgabe H1** (Neumann–Randbedingung)

Bearbeiten Sie Aufgabe G3.

**Aufgabe H2** (Dirichletsches Prinzip)

Sei $H$ ein Hilbertraum, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine stetige, symmetrische, koerzive Sesquilinearform und $\varphi \in H'$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt genau ein $u \in H$ mit $a(v,u) = \varphi(v)$ für alle $v \in H$.

(b) Das Funktional

$$F(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - \Re\varphi(v), \quad v \in H,$$

besitzt genau ein absolutes Minimum, das in $u$ (vgl. (a)) angenommen wird.

*Hiweis:* Zeigen Sie, dass es ein $\alpha > 0$ gibt, so dass für alle $v \in H$ gilt:

$$F(v) - F(u) = \frac{1}{2}a(v-u, v-u) \geq \frac{\alpha}{2}\|v-u\|^2.$$

**Lösung:**

(a) Nach dem Satz von Lax–Milgram existiert genau ein stetiger und stetig invertierbarer, linearer Operator mit $a(v,w) = (v, Aw)$ für alle $v, w \in H$. Außerdem existiert nach dem Rieszschen Dartstellungsatz genau ein $z \in H$ mit $\varphi(v) = (v,z)$ für alle $v \in H$. Dann ist $u := A^{-1}z$ das eindeutig bestimmte Element in $H$ mit

$$a(v,u) = (v, Au) = (v, AA^{-1}z) = (v,z) = \varphi(v).$$

(b) Beweis des Hinweises:

$$\begin{aligned}
F(v) - F(u) &= \tfrac{1}{2}(a(v,v) - a(u,u)) - \Re\varphi(v-u) \\
&\overset{(a)}{=} \tfrac{1}{2}(a(v,v) - a(u,u)) - \Re a(v-u,u) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(a(v,v) - a(u,u) - (a(v-u,u) + \overline{a(v-u,u)})\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(a(v,v) - a(u,u) - (a(v-u,u) + a(u,v-u))\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(a(v,v) - a(u,u) - (a(v,u) + a(u,v) - 2a(u,u))\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(a(v,v) - a(v,u) - a(u,v) + a(u,u)\big) = \tfrac{1}{2}a(v-u,v-u),
\end{aligned}$$

also liefert die Koerzivität die gewünschte Abschätzung. Dies zeigt, dass $F(v) \geq \frac{\alpha}{2}\|v-u\| + F(u) > F(u)$, falls $u \neq v$, woraus die Behauptung folgt.