Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
12.01.2007

10. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Zeigen Sie, dass ein $B \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega))$, $Bf = g$ mit $\langle \varphi, f\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \varphi, g\rangle_{H_0^1(\Omega)}$ existiert.

(b) Zeigen Sie, dass

$$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}, \quad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \overline{\nabla v}$$

eine stetige, koerzive Sesquilinearform ist.

(c) Sei $f \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, && \text{in } \Omega \\ u &= 0, && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt, d.h.

$$\langle \nabla\varphi, \nabla u\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \varphi, f\rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Zeigen Sie außerdem, dass die Lösung der Abschätzung

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{2}$$

mit einer von f unabhängigen Konstante $C > 0$ genügt. Wovon hängt diese Konstante ab?

(d) Zeigen Sie, dass auf $H_0^1(\Omega)$ durch $\langle f, g\rangle_{\tilde{H}} = \int_\Omega \nabla f \overline{\nabla g}$ ein äquivalentes Skalarprodukt definiert wird. Wie wirkt sich dies auf die Abschätzung (2) aus?

(e) Ist die schwache Lösung von (1) eindeutig?

Lösung:

(a) Es gilt:

$$\langle \varphi, f\rangle_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

d.h. $\langle \cdot, f\rangle_{L^2(\Omega)} \in (H_0^1(\Omega))'$ und $\|\rangle\cdot, f\langle_{L^2(\Omega)}\|_{(H_0^1(\Omega))'} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$. Nach dem Satz von Riesz, existiert $g \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\langle \varphi, f\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \varphi, g\rangle_{H_0^1(\Omega)}$$

und $\|g\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\langle \cdot, f\rangle_{L^2(\Omega)}\|_{(H_0^1(\Omega))'} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$. Setze $Bf := g$. Wegen der Eindeutigkeit ist B linear.

(b) Wegen

$$|a(u,v)| = \int_\Omega \nabla u \overline{\nabla v} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

ist a mit $M = 1$ stetig. Mit der Poincaré-Ungleichung erhalten wir für $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (1 + C_p)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = (1 + C_p)a(u,u),$$

d.h. a ist koerziv mit $\alpha = 1/(1 + C_p)$.

(c) Mit Lax-Milgram folgt, dass $A \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$ mit

$$a(u,v) = \rangle u, Av\langle_{H_0^1(\Omega)}, \quad u, v \in H_0^1(\Omega)$$

existiert. Wir definieren $u = A^{-1}Bf$ (vgl. (a)), dann gilt

$$\int_\Omega \nabla\varphi\overline{\nabla u} = a(\varphi, u) = \rangle\varphi, AA^{-1}Bf\langle_{H_0^1(\Omega)} = \rangle\varphi, Bf\langle_{H_0^1(\Omega)} = \rangle\varphi, f\langle_{L^2(\Omega)}, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Desweiteren

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega))}\|B\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega))}\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq (1 + C_p)\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

(d) Wegen der Poincaré-Ungleichung sind beide Skalarprodukte äquivalent. Wie in (b) erhalten wir $M = 1$ und $\alpha = 1$, also

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

(e) Sei u_1, u_2 schwache Lösungen zu (1). Dann gilt;

$$\langle \nabla\varphi, \nabla(u_1 - u_2)\rangle_{L^2(\Omega)} \leq 0, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Insbesondere, $\|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^2(\Omega)} = 0$, d.h. $u_1 = u_2$ nach (d). Also ist die Lösung eindeutig.

Aufgabe G2

Sei H ein Hilbertraum, $N, M \subset H$ und U ein Unterraum von H.

(a) Sei $x, y \in H$ mit $x \perp y \Longrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$ (Pythagoras).

(b) $M^\perp$ ist ein abgeschlossener Unterraum von H.

(c) $N \subseteq M \Longrightarrow M^\perp \subseteq N^\perp$

(d) $M \subseteq M^{\perp\perp} = \overline{\text{lin}}(M)$

(e) Geben Sie Beispiele von Räumen H und U an, so dass $U \neq U^{\perp\perp}$.

Lösung:

(a) Sei $x, y \in H$ mit $x \perp y$. Dann gilt:

$$\langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

(b) Sei $u_n \in M^\perp$ mit $u_n \to u$. Dann gilt für $m \in M$

$$0 = \lim_{n\to\infty} \langle m, u_n\rangle = \langle m, u\rangle,$$

also $u \in M^\perp$.

(c) Sei $x \in M^\perp$. Dann gilt $\langle x, y\rangle = 0$ für alle $y \in M$, d.h. insbesondere $\langle x, y\rangle = 0$ für alle $y \in N$, also $x \in N^\perp$.

(d) Es genügt z.Z., dass $M^{\perp\perp} = \overline{\text{lin}}\, M$.
'$\supset$: Offensichtlich gilt $M \subset M^{\perp\perp}$, also auch lin $M \subset M^{\perp\perp}$. Da ,vgl. (b), $M^{\perp\perp}$ abgeschlossen ist, folgt $M^{\perp\perp} = \overline{\text{lin}}\, M$.
'$\subset$: Sei $x \in M^{\perp\perp} \cap (\overline{\text{lin}}\, M)^\perp$ (vgl. Satz 11.10). Dann ist $x \in M^\perp \setminus M^{\perp\perp\perp}$, also $x = 0$, da $M^\perp \subset M^{\perp\perp\perp}$.

(e) Sei $H = \ell^2$ und $U := c_{00} = \{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,:\, x_n \neq 0 \text{ nur für endlich viele } n\}$. Dann ist U dicht in H, also $U^{\perp\perp} = H \neq U$.

Hausübung

Aufgabe H1

(Hardyraum) Sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Dann heißt

$$H^2(D) := \left\{ f : D \to \mathbb{C} \text{ holomorph mit } \sup_{0\le r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \,\mathrm{d}t \right\}$$

Hardyraum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit Potenzreihendarstellung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) z^n$, so gilt
$$f \in H^2(D) \quad \Longleftrightarrow \quad (a_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2.$$

(b) Für $f, g \in H^2(D)$ existiert
$$(f,g) := \lim_{r\to 1-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it})\overline{g(re^{it})}\,\mathrm{d}t,$$
und es gilt $(f,g) = \langle (a_n(f)), (a_n(g))\rangle$, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalarprodukt in ℓ^2 ist.

(c) Die Funktionen e_k, definiert durch $e_k(z) := z^k$, $k = 0,1,2,\ldots$, formen eine Orthonormalbasis von $H^2(D)$.

Lösung:

(a) Wir beobachten zunächst, dass für alle $0 \le r < 1$:
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|\sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) r^k e^{ikt}\Big|^2 \,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) r^k e^{ikt}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m(f)} r^m e^{-imt}\Big)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Cauchy-Produkt}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} a_k(f) r^k e^{ikt}\overline{a_m(f)} r^m e^{-imt}\Big)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{glm. Konvergenz}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_k(f)\overline{a_m(f)} r^{k+m} e^{i(k-m)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} a_k(f)\overline{a_m(f)} r^{k+m} \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} a_k(f)\overline{a_m(f)} r^{k+m}\delta_{km} = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(f)|^2 r^{2k}.
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$: Sei $(a_n(f)) \in \ell^2$. Dann gilt
$$\sup_{0\le r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\,\mathrm{d}t = \sup_{0\le r<1} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(f)|^2 r^{2k} \le \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(f)|^2 < +\infty,$$
also ist $f \in H^2(D)$.

$\Rightarrow$: Sei $f \in H^2(D)$. Dann gilt
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(f)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{0\le r<1} |a_k(f)|^2 r^{2k} &\overset{\text{mon. Konvergenz}}{=} \sup_{0\le r<1} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(f)|^2 r^{2k} \\
&= \sup_{0\le r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\,\mathrm{d}t < +\infty.
\end{aligned}$$
Also $(a_k(f)) \in \ell^2$.

(b) Wie in (a) beweist man

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})\overline{g(re^{it})}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\overline{a_k(g)}r^{2k}.$$

Es gilt $(a_k(f)a_k(g)) \in \ell^1$, denn $(a_k(f))$ und $(a_k(g))$ gehören zu ℓ^2. Der Lebesguesche Konvergenzsatz zeigt, dass der Limes existiert und

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 1-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})\overline{g(re^{it})}\,\mathrm{d}t &= \lim_{r\to 1-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\overline{a_k(g)}r^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\overline{a_k(g)}\\ &= \langle (a_k(f)), (a_k(g))\rangle.\end{aligned}$$

(c) Nach (a) ist die Abbildung

$$\Phi : H^2(D) \to \ell^2, \quad f \mapsto (a_k(f))$$

linear und bijektiv. Nach (a) gilt $(f, g) = \langle \Phi(f), \Phi(g)\rangle$, also übertragen sich die Hilbertraum-Eigenschaften von ℓ^2 auf $H^2(D)$.

Aufgabe H2

In einem Hilbertraum gilt die Äquivalenz

$$x_n \to x \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_n \xrightarrow{\sigma} x \text{ (schwache Konvergenz)} \\ \|x_n\| \to \|x\| \end{cases}$$

Lösung: $\Rightarrow$: Falls $x_n \to x$ in Norm, dann gelten auch $\|x_n\| \to \|x\|$ und $(x_n, y) \to (x, y)$, denn die Abbildungen $x \mapsto \|x\|$ und $x \to (x, y)$ sind stetig.

$\Leftarrow$: Umgekehrt gilt

$$\|x_n - x\|^2 = (x_n - x, x_n - x) = \|x_n\|^2 - (x_n, x) - (x, x_n) + \|x\|^2 \to \|x\|^2 - 2(x, x) + \|x\|^2 = 0.$$