Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
22.12.2006

9. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes C^1-Gebiet. Sei $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $1 \leq p < d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$

(b) $p = d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ für alle $r \in [p, \infty)$

(c) $p > d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

jeweils mit stetiger Einbettung.

Sei $p > d$ und $\theta = 1 - \frac{d}{p}$. Dann existiert $C := C_{\Omega,p,d}$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}|x-y|^\theta \qquad \forall f \in W^{1,p}(\Omega).$$

Lösung: Betrachte den Fortsetzungsoperator F.

(a) Sei $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt wegen des Sobolev–Einbettungsatzes für $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|Ff\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq C\|Ff\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \leq CC'\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

(b) Genau wie in (a).

(c) Sei $x, y \in \Omega$. Es gilt

$$|f(x)-f(y)| = |(Ff)(x)-(Ff)(y)| \leq C\|Ff\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}|x-y|^\theta \leq CC'\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}|x-y|^\theta.$$

Aufgabe G2

Sei $f \in L^p(\Omega)$ mit $1 < p \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind

(a) $f \in W^{1,p}(\Omega)$.

(b) Es existiert $C > 0$

$$\Big|\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big| \le C \cdot \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ i = 1, \ldots, d.$$

Lösung: (a) $\Rightarrow$ (b): Sei $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt

$$\Big|\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big| = \Big|\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\Big| \le \|\tfrac{\partial f}{\partial x_i}\|_{L^p(\Omega)}\|\varphi\|_{L^q(\Omega)}$$

falls $\|f\|_{L^p(\Omega)} \neq 0$ (sonst ist die Ungleichung trivial).

(b) $\Rightarrow$ (a): Nach Voraussetzung ist das Funktional

$$\Psi(\varphi) := \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

stetig auf dem normierten Vektorraum $(C_c^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{L^q(\Omega)})$. Also besitzt Ψ eine stetige Fortsetzung auf $L^q(\Omega)$, denn für $1 \le q < \infty$ ist $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $L^q(\Omega)$. Dann existiert $g \in L^p(\Omega)$ (da $L^q(\Omega)' = L^p(\Omega)$) mit $\Psi(\varphi) = \int_\Omega g\varphi$. Also $\int_\Omega g\varphi = \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, d.h. $D_i f = -g$ und $f \in W^{1,p}(\Omega)$.

Hausübung

Aufgabe H1

Sei $f \in L^p(\Omega)$ mit $1 < p \le \infty$. Zeigen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind

(a) $f \in W^{1,p}(\Omega)$.

(b) Es existiert $C > 0$ so, dass für jede $\Omega' \subset \Omega$ mit $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ und für alle $h \in \mathbb{R}^d$ mit $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \Omega^c)$

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega')} \le C|h|.$$

Lösung: (a) $\Rightarrow$ (b): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $h \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt (Beachte: $\frac{d}{dt}\varphi(x + th) = (\nabla\varphi)(x + th)h$):

$$\begin{aligned}
\|\tau_h \varphi - \varphi\|_{L^p(\Omega')} &= \left(\int\limits_{\Omega'} \left|\int\limits_0^1 (\nabla\varphi)(x + th)h \,\mathrm{d}t\right|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le |h| \left(\int\limits_{\Omega'} \int\limits_0^1 |(\nabla\varphi)(x + th)|^p \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |h| \left(\int\limits_0^1 \int\limits_{\Omega'} |(\nabla\varphi)(x + th)|^p \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} = h\|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Sei nun $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann existiert $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\|u - \varphi_n|_\Omega\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0$. Damit folgt:

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega')} = \lim_{n\to\infty} \|\tau_h \varphi_n - \varphi_n\|_{L^p(\Omega')} \leq \lim_{n\to\infty} |h| \|\nabla \varphi_n\|_{L^p(\Omega)} = |h| \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

(b) $\Rightarrow$ (a): Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\Omega' = \overline{\overset{\circ}{\operatorname{supp}}\, \varphi}$ (das Innere des Trägers) und $h_0 = \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\varphi, \partial\Omega)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_\Omega f \partial_{x_i} \varphi &= \lim_{h\to 0} \int_\Omega f \frac{\tau_{he_i}\varphi - \varphi}{h} = \lim_{h\to 0} \int_\Omega \frac{\tau_{-he_i} f - f}{h} \varphi \\ &\leq \sup_{|h|\leq h_0} \frac{1}{h} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega')} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}.\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus Aufgabe G2.

Aufgabe H2

Skizzieren Sie den Beweis von Satz 10.9.

Lösung: s. Skript.

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr