Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2006/07
15.12.2006

8. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$ und $p > 1$.

(a) Zeigen Sie, dass die Einbettungen

$$W^{m,p}(I) \hookrightarrow W^{1,p}(I) \hookrightarrow W^{1,1}(I) \hookrightarrow C(\overline{I}).$$

stetig sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Einbettung

$$W^{m,p}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$$

kompakt ist.

Lösung: s. Skript.

Aufgabe G2

Es sei $d \geq 2$ und $\Omega := B(0, 1/e) := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1/e\}$. Zeigen Sie, dass es eine Funktion aus $W^{1,2}(\Omega)$ gibt, die auf Ω nicht-stetig ist. Betrachte dazu Funktionen der Form

$$f(x) := \big(\log(1/|x|)\big)^s, \quad s \in (0,\infty).$$

Was bedeutet das für Aussagen über $W^{1,2}$-Funktionen am Rand ihres Definitionsbereiches?

Lösung: Für jedes $s > 0$ hat die Funktion eine Singularität in 0, ist also nicht stetig auf Ω. Wir zeigen, dass ein $s > 0$ existiert mit $f \in W^{1,2}(\Omega)$. Unabhängig von $s > 0$ ist $f \in L^2(\Omega)$, denn

$$\int_\Omega \big|\log 1/|x|\big|^{2s}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \big(-|x|^\varepsilon \log|x|\big)^{2s} \cdot \frac{1}{|x|^{2\varepsilon s}}\,\mathrm{d}x \leq C_\varepsilon \int_\Omega \frac{1}{|x|^{2\varepsilon s}}\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

falls $\varepsilon > 0$ klein genug gewählt ist. Weiter gilt für jedes $j = 1, \dots, d$

$$(D_j f)(x) = s\big(\log 1/|x|\big)^{s-1} \cdot |x| \cdot \frac{-1}{|x|^2} \cdot \frac{2x_j}{2|x|}.$$

Also

$$\int_\Omega |(D_j f)(x)|^2 \, \mathrm{d}x = s^2 \int_\Omega \left| \big(\log 1/|x|\big)^{s-1} \frac{x_j}{|x|^2} \right|^2 \mathrm{d}x \leq C_s \int\limits_0^{\frac{1}{\mathrm{e}}} |\log(r)|^{2s-2} r^{d-3} \, \mathrm{d}r$$

$$\overset{r=\mathrm{e}^t}{=} C_s \int\limits_{-\infty}^{-1} t^{2s-2} \mathrm{e}^{t(d-2)} \, \mathrm{d}t < \infty, \quad s < \frac{1}{2}.$$

Also ist $f \in W^{1,2}(\Omega)$ aber nicht stetig.

Aufgabe G3

Sei $d \geq 2$ und $f_1, \dots, f_d \in L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})$. Für $x \in \mathbb{R}^d$ und $1 \leq i \leq d$ setze für $x \in \mathbb{R}^d$

$$\widetilde{x}_i := (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \text{und } f(x) = f_1(\widetilde{x}_1) f_2(\widetilde{x}_2) \cdots f_n(\widetilde{x}_d).$$

Zeigen Sie, dass $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}$$

gilt.

Lösung: Der Fall $d = 2$ ist trivial. Wir beweisen mit Induktion. Sei $d \geq 3$ und nehme an, dass für alle $2 \leq k < d$ die Behauptung wahr ist. Dann

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, \mathrm{d}x_d \, \mathrm{d}x_1 \dots \, \mathrm{d}x_{d-1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |f_d(\widetilde{x}_d)| \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{d-1} |f_i(\widetilde{x}_i)| \, \mathrm{d}x_d \, \mathrm{d}x_1 \dots \, \mathrm{d}x_{d-1} \\
&\overset{\text{veralg. Hölder}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_d(\widetilde{x}_d)| \Big(\prod_{i=1}^{d-1} \int_{\mathbb{R}} |f_i(\widetilde{x}_i)|^{d-1} \, \mathrm{d}x_d \Big)^{\frac{1}{d-1}} \mathrm{d}x_1 \dots \, \mathrm{d}x_{d-1} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f_d\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{i=1}^{d-1} \Big(\int_{\mathbb{R}} |f_i(\widetilde{x}_i)|^{d-1} \, \mathrm{d}x_d \Big)^{\frac{1}{d-2}} \mathrm{d}x_1 \dots \, \mathrm{d}x_{d-1} \Big)^{\frac{d-2}{d-1}} \\
&\overset{\text{Ind.}}{\leq} \|f_d\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})} \prod_{i=1}^{d-1} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} |f_i(\widetilde{x}_i)|^{d-1} \, \mathrm{d}x_d \, \mathrm{d}\widetilde{x}_i \Big)^{\frac{1}{d-1}} \\
&= \prod_{i=1}^{d-1} \|f_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}.
\end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H1

Seien $\Omega', \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, und $\Phi : \Omega' \to \Omega$ ein C^1-Diffeomorphismus mit beschränkten Ableitungen $D\Phi$, $D\Phi^{-1}$. Beweisen Sie die folgende Aussage. Falls $f \in W^{1,p}(\Omega)$, dann liegt $f \circ \Phi$ in $W^{1,p}(\Omega')$ und

$$D_i(f \circ \Phi) = \sum_{j=1} D_j f \circ \Phi \cdot D_i \Phi_j,$$

wobei $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \ldots, \Phi_d(x))$ mit Koordinatenfunktionen $\Phi_j : \Omega' \to \mathbb{R}$.

Lösung: Siehe: H. W. Alt, Lineare Funktionalanalysis, Seite 113.

Aufgabe H2

Sei $m \in \mathbb{N}$ $(m \geq 1)$ und $1 \leq p < \infty$. Die folgende Aussagen sind zu beweisen:

(a) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} = 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d)$ für alle $r \in [d, \infty)$

(b) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$

jeweils mit stetiger Einbettung.

(a) Sei $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0$, $m - d/p \notin \mathbb{N}$. Setze

$$k := \left[m - \tfrac{d}{p}\right] \qquad \text{und} \quad \theta := m - \tfrac{d}{p} - k,\ 0 < \theta < 1.$$

Dann existiert eine Konstante C, so dass für jede $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\begin{aligned} \|D^\alpha f\|_{L^\infty} &\leq C\|f\|_{W^{m,p}} && \text{für alle } |\alpha| \leq k \\ |D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| &\leq C\|f\|_{W^{m,p}}|x-y|^\theta && \text{für fast alle } x, y \in \mathbb{R}^d,\ |\alpha| = k. \end{aligned}$$

Lösung: Wir benutzen die bekannte Einbettungssätze für $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.

(a) Sei $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$, d.h. $D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ für $|\alpha| \leq m$. Sei $r \in [d, \infty)$ beliebig und setze $r_m = p$, dann gilt für $i = 2, \ldots, m$

$$\|D^\alpha u\|_{L^{r_{i-1}}(\mathbb{R}^d)} \leq C_i \|D^\beta u\|_{W^{1,r_i}(\mathbb{R}^d)} \qquad \text{falls } |\beta| = |\alpha| + 1 = i \text{ und } \tfrac{1}{r_{i-1}} = \tfrac{1}{r_i} - \tfrac{1}{d},$$

mit Konstanten C_i und für $i = 1$ und $r_1 = d$

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq C_1 \|u\|_{W^{1,r_1}(\mathbb{R}^d)}.$$

Also

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \qquad \text{falls } 0 = \tfrac{1}{r_1} - \tfrac{1}{d} = \tfrac{1}{r_2} - \tfrac{1}{d} - \tfrac{1}{d} = \cdots = \tfrac{1}{r_m} - \tfrac{m}{d} = \tfrac{1}{p} - \tfrac{m}{d}.$$

(b) Sei $0 \leq n < m$, so dass $\frac{1}{p} - \frac{n+1}{d} < 0$ und $\frac{1}{p'} := \frac{1}{p} - \frac{n}{d} \geq 0$. Dann gilt

$$W^{n,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^d),$$

mit stetiger Einbettung, und wie vorher

$$W^{n+1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W^{1,p'}(\mathbb{R}^d),$$

auch mit stetiger Einbettung. Schließlich sind die Einbettungen

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W^{n+1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W^{1,p'}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

auch stetig (für die letzen Ungleichung bemerke, dass $\frac{1}{p'} - \frac{1}{d} < 0$).

(c) Man beweist mit Induktion und ähnlich zu (b).

Aufgabe H3

Es sei $d \geq 2$, sowie $\mathbb{R}^d_+ := \{x \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\}$ der Halbraum und für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ schreiben wir $x = (x', x_d)$ mit $x' = (x_1, \ldots, x_{d-1})$. Wir wollen $W^{1,2}(\mathbb{R}^d_+)$ Funktionen am Rand von $\mathbb{R}^d_+$ auswerten. Beweisen Sie dazu die folgende Aussagen:

(a) Für alle $u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^d_+})$ gilt

$$u(x', 0) = -\int_0^\infty \frac{\partial u(x', x_d)}{\partial x_d} \, \mathrm{d}x_d.$$

(b) Für alle $u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^d_+})$ gilt $\|u(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} \leq \|u\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^d_+)}$.

(c) **(Spursatz)** Es gibt eine eindeutige stetige lineare Abbildung $\Gamma : W^{1,2}(\mathbb{R}^d_+) \to L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ mit $\Gamma u = u|_{\mathbb{R}^{d-1}}$ für $u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^d_+})$. (Verwende dazu ohne Beweis, dass $C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^d_+})$ dicht in $W^{1,2}(\mathbb{R}^d_+)$ ist.)

Lösung:

(a) Für $u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^d_+})$ gilt

$$-\int_0^r \frac{\partial u(x', x_d)}{\partial x_d} \, \mathrm{d}x_d = u(x', 0) - u(x', r) \quad \text{für } r > 0.$$

Da der Träger von u kompakt in $\overline{\mathbb{R}^d_+}$ ist, erhalten wir die gewünschte Identität für $r \to \infty$.

(b) Aus Teil (a) erhalten wir

$$u^2(x', 0) = -2 \int_0^\infty u(x', x_d) \frac{\partial u(x', x_d)}{\partial x_d} \, \mathrm{d}x_d$$

Die Cauchy-Schwartz-Ungleichung liefert nun

$$\leq 2\Big(\int_0^\infty u^2(x',x_d)\,\mathrm{d}x_d\Big)^{1/2}\Big(\int_0^\infty \Big(\frac{\partial u(x',x_d)}{\partial x_d}\Big)^2\,\mathrm{d}x_d\Big)^{1/2} \leq$$
$$\leq \int_0^\infty u^2(x',x_d)\,\mathrm{d}x_d + \int_0^\infty \Big(\frac{\partial u(x',x_d)}{\partial x_d}\Big)^2\,\mathrm{d}x_d.$$

Integrieren wir diese Ungleichung in x' so erhalten wir

$$\|u(\cdot,0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} \leq \int_{\mathbb{R}^d_+} u^2(x',x_d)\,\mathrm{d}x_d + \int_{\mathbb{R}^d_+} \Big(\frac{\partial u(x',x_d)}{\partial x_d}\Big)^2\,\mathrm{d}x_d \leq \|u\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^d_+)}.$$

(c) Nach Teil b) ist der lineare Operator

$$\widetilde{\Gamma} : C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^d}) \to L^2(\mathbb{R}^{d-1}), \qquad \widetilde{\Gamma} u := u|_{\partial\overline{\mathbb{R}^d}}$$

stetig, wenn $C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^d})$ mit der $W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$-Norm versehen ist. Dieser Operator ist nach Aufgabestellung in $W^{1,2}(\mathbb{R}^d_+)$ dicht definiert, also besitzt er eine stetige Fortsetzung Γ auf $W^{1,2}(\mathbb{R}^d_+)$.