Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
08.12.2006

7. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Falls $f \in C^m(\Omega)$, so stimmen die "klassischen Ableitungen" und die distributionellen Ableitungen für $|\alpha| \leq m$ überein.

(b) Seien $g_1, g_2 \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ distributionelle Ableitungen von $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Dann gilt $g_1 = g_2$ fast überall.

Lösung:

(a) Folgt mittels partieller Integration.

(b) Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und $g_1, g_2 \in L^1_{\text{loc}}\Omega$ mit $f' = g_1$ und $f' = g_2$. Nach Definition der distributionellen Ableitung gilt:

$$\int_\Omega (g_1 - g_2)\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Sei (ρ_n) ein Molliefier und g_1^0, g_2^0 die Erweiterung von g_1, g_2 mit 0 auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\left(\rho_n * (g_1^0 - g_2^0)\right)(x) = 0$ für $x \in \Omega$ mit dist $(x, \Omega^c) > \frac{1}{n}$. Da (Wieso? Beweis?)

$$\lim_{n\to\infty} \|\rho_n * (g_1 - g_2) - (g_1 - g_2)\|_{L^1(K)} = 0, \quad \forall K \subset \Omega \text{ kompakt},$$

folgt $\|g_1 - g_2\|_{L^1(K)} = 0$ für alle $K \subset \Omega$ kompakt, d.h. $g_1 = g_2$ fast überall.

Aufgabe G2

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Für $k \in \mathbb{N}$ wird induktiv

$$M_k := \left\{x \in 2^{-k}\mathbb{Z}^d\right\} : \overline{B(x, 2^{1-k})} \subseteq \Omega,\ x \notin B(y, 2^{1-l}) \text{ für alle } y \in M_l \text{ mit } l < k\right\}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $(B(x,2^{1-k}))_{x\in M_k,k\in\mathbb{N}}$ eine lokal finite Überdeckung von Ω ist.

Lösung: Offenbar gilt $\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{x\in M_k} B(x,2^{1-k}) = \Omega$.

Wir zeigen, dass die überdeckung lokal endlich ist. Sei $y\in\Omega$. Dann existiert ein $k\in\mathbb{N}$ und ein $x\in M_k$ mit $y\in B(x,2^{1-k})$. Sei $d = \text{dist }(y, B(x,2^{1-k})^c)$ und $k_0\in\mathbb{N}$ mit $2^{1-k_0} < d$. Dann gilt:

$$y \notin \bigcup_{l\geq k_0}\bigcup_{x\in M_l} B(x,2^{1-l}).$$

Aufgabe G3

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Banachräume und $1\leq p\leq\infty$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Falls X_i, $i=1,\ldots,n$ alle separabel sind, dann ist $X_1 \underset{p}{\oplus} X_2 \underset{p}{\oplus} \cdots \underset{p}{\oplus} X_n$ auch separabel.

(b) Falls X_i, $i=1,\ldots,n$ alle reflexiv sind, dann ist $X_1 \underset{p}{\oplus} X_2 \underset{p}{\oplus} \cdots \underset{p}{\oplus} X_n$ auch reflexiv.

Lösung:

(a) Seien A_i abzählbare dichte Teilmengen in X_i, $i=1,\ldots,n$. Dann ist $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ abzählbar und dicht in $X_1 \underset{p}{\oplus} X_2 \underset{p}{\oplus} \cdots \underset{p}{\oplus} X_n$.

(b) Man zeigt erst, dass $(X_1 \underset{p}{\oplus} X_2 \underset{p}{\oplus} \cdots \underset{p}{\oplus} X_n)'$ isomorph zu $X_1'\times\cdots\times X_n'$ ist (p spielt keine Rolle hier). Dann ist das Problem so umformuliert: es ist die Surjektivität von $\iota : X_1\times\cdots\times X_n \to X_1''\times\cdots\times X_n''$ zu zeigen. Aber das ist leicht, denn die Surjektivität folgt koordinateweise aus der Voraussetzung.

Hausübung

Aufgabe H1

Sei $I=(a,b)\subseteq\mathbb{R}$, $a<b$. Zeigen Sie, dass $C_c^\infty(I)$ nicht dicht in $W^{m,\infty}(I)$ ist. Ferner sind $W^{1,\infty}(I)$ und $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ nicht separabel.

Lösung: In diesem Aufgabe versehen wir $W^{1,\infty}$ mit äquivalenter Norm $\|f\| = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$. Die konstante 1 Funktion f liegt in $W^{m,\infty}(I)$ aber kann nicht mit Funktionen aus $C_c(I)$ approximiert werden, denn $C_c(I)\ni f_n\to f$ in $W^{m,\infty}$ impliziert $C_c(I)\ni f_n\to f$ in L^∞, also $f_n\to f$ gleichmässig, aber $\|f_n - f\| = 1$ für alle solchen f_n. Nehmen wir an, dass es eine Folge (φ_n) in $C_c^\infty(I)$ oder $C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\text{supp }\varphi_n\cap\text{supp }\varphi_k=\emptyset$ falls $n\neq k$ und mit $\|\varphi_n\|_{W^{1,\infty}}=1$ existiert. Dann betrachte $X := \{\sum_{n=1}^\infty a_n\varphi_n : (a_n)\in\ell^\infty\}$. Es is leicht zu zeigen dass X ein Unterraum von $W^{1,\infty}$ und isometrisch isomorph zu ℓ^∞ ist. Daher ist X nicht separabel und so kann auch $W^{1,\infty}$ nicht separabel sein. Die Konstruktion den Funktionen φ_n ist leicht im Falle von $\mathbb{R}$: einfach verschiebt man vielmals eine $C_c^\infty(\mathbb{R})$ Funktion. Im Falle von I nehmen wir $I = (a,b) = (0,1)$ an. Betrachte $\varphi \in C_c^\infty(I)$ mit $\|\varphi\|_{W^{1,\infty}} = 1$ und $\operatorname{supp} \varphi \subset (0, 1/2)$. Setze $\varphi_n(x) := \frac{1}{2^n}\varphi(2^n x - (1 - 1/2^{n-1}))$, welche die gewünschte Eigenschaften hat (betrachte hier φ als 0 außerhalb I). In diesem Falle ist X allerdings nicht mehr isometrisch isomorph zu ℓ^∞, sondern nur noch isomorph zu ℓ^∞.

Aufgabe H2

Zeigen Sie:

(a) $[-1,1] \ni x \mapsto |x|$ liegt in $W^{1,1}((-1,1))$.

(b) Sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ mit schwacher Ableitung g, $g(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$, dann ist $f \equiv c$ fast überall für eine Konstante c.

Lösung:

(a) Die schwache Ableitung der gegebenen Funktion ist $-2\chi_{[-1,0)} + 1$. Man muß einfach die Definition überprüfen.

(b) Sei $\Omega = B(0,R)$ und $\Omega' = B(0,R+1)$ zwei Kugeln. Wir zeigen, dass $f = 0$ fast überall in Ω. Dann folgt auch die Behauptung.

Betrachte einen Mollifier (ρ_n). Dann gilt $D_j(\rho_n * f) = \rho_n * D_j f = 0$ (Wieso?), d.h. $\rho_n * f \equiv C$. Außerdem gilt

$$C = (\rho_n * f)|_\Omega = (\rho_n * \chi_{\Omega'} f)|_\Omega \to \chi_\Omega f \text{ in } L^1(\Omega),$$

d.h. $f \equiv C$ f. ü..