Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
01.12.2006

6. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei X ein normierter Vektorraum, $L \subseteq X$ abgeschlossen, $K \subseteq X$ kompakt.

(a) Zeigen Sie, dass $L + K := \{x + y : x \in L, y \in K\}$ abgeschlossen ist.

(b) Zeigen Sie, dass $L + k$ kompakt ist, falls zusätzlich L kompakt ist.

(c) Geben Sie zwei abgeschlossene Mengen an, deren Summe nicht abgeschlossen ist.

Lösung:

(a) Sei $(x_n) \subset L+K$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x. Dann existieren $(x_n^1) \subset L$ und $(x_n^2) \subset K$ mit $x_n = x_n^1 + x_n^2$. Da K kompakt ist, existiert $(x_{n_k}^2) \subset (x_n^2)$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}^2 = x^2 \in K$. Nach Voraussetzung konvergiert auch $(x_{n_k}^1)$, etwa gegen x_1. Da L abgeschlossen ist, gilt $x_1 \in L$. Offenbar gilt $x = x_1 + x_2$, d.h. $x \in L + K$.

(b) Sei $(x_n) \subset L + K$ eine Folge. Dann existieren $(x_n^1) \subset L$ und $(x_n^2) \subset K$ mit $x_n = x_n^1 + x_n^2$. Da K kompakt ist, existiert $(x_{n_k}^2) \subset (x_n^2)$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}^2 = x^2 \in K$. Da auch L kompakt ist, existiert $(x_{n_{k_l}}) \subset (x_{n_k}^1)$ mit $\lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l}}^2 = x^1 \in L$. Offenbar gilt $\lim_{l\to\infty}(x_{n_{k_l}}) = x^1 + x^2 \in K + L$

(c) Wähle $M_1 := \{x \in \mathbb{R} : x = n + \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$ und $M_2 := -\mathbb{N}$. Dann gilt $0 \notin M_1 + M_2$, aber $(\frac{1}{n}) \subset M_1 + M_2$.

Aufgabe G2

Zeigen Sie

(a) Der Raum $L^1 \cap L^\infty(M,\mu) := L^1(M,\mu) \cap L^\infty(M,\mu)$, versehen mit der Norm $\|f\|_{1\cap\infty} := \|f\|_1 + \|f\|_\infty$, ist ein Banachraum.

(b) Definiere $L^1 + L^\infty(M,\mu) := \{f : f : M \to \mathbb{K}$ messbar und $\exists g \in L^1(M,\mu),\ h \in L^\infty(M,\mu)$ mit $f = g + h\}$. Die Abbildung

$$\|f\|_{1+\infty} := \inf\{\|h\|_1 + \|g\|_\infty :\ h \in L^1,\ f \in L^\infty\}.$$

ist eine Norm, mit der $L^1 + L^\infty$ ein Banachraum ist.

(c) Es gilt $L^p(M,\mu) \hookrightarrow L^1 + L^\infty(M,\mu)$, wobei die Einbettung stetig ist.

Lösung:

(a) Es ist klar, dass $\|\cdot\|_{1\cap\infty}$ eine Norm ist.
Sei nun $(u_n) \subset L^1 \cap L^\infty(M,\mu)$ eine Cauchyfolge. Dann ist (u_n) auch eine Cauchyfolge in $L^1(M,\mu)$ und $L^\infty(M,\mu)$. Wegen der Vollständigkeit von $L^1(M,\mu)$ und $L^\infty(M,\mu)$ folgt, dass (u_n) in $L^1(M,\mu)$ und $L^\infty(M,\mu)$ konvergiert. Da jede konvergente Folge in $L^\infty(M,\mu)$ fast überall punktweise konvergiert und jede konvergenteFolge in $L^1(M,\mu)$ eine Teilfolge besitzt, die fast überall punktweise konvergiert, stimmen die Grenzwerte überein. Daher konvergiert (u_n) auch in $L^1 \cap L^\infty(M,\mu)$. vollständig ist.

(b) Die Homogenität und die Dreicksungleichung sind klar. Sei $u \in L^1 + L^\infty$ mit $\|u\|_{1+\infty} = 0$. Dann existieren zu $\varepsilon > 0$ Funktionen $h_\varepsilon \in L^1(M,\mu)$ und $h_\varepsilon \in L^\infty(M,\mu)$ mit $\|h_\varepsilon\|_1 \leq \varepsilon$, $\|g_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$ und $u = h_\varepsilon + g_\varepsilon$. Nach Satz der Vorlesung dürfen wir annehmen, dass $\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt. Daher folgt:

$$u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(x) + g_\varepsilon(x) = 0, \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Also ist $\|\cdot\|_{1+\infty}$ eine Norm.
Sei $(u_n) \subset L^1 + L^\infty(M,\mu)$ eine Cauchyfolge. Wähle eine Teilfolge $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ mit

$$\|u_{n_k} - u_{n_{k+1}}\|_{1+\infty} \leq \frac{1}{k^2}$$

und $h_k \in L^1(M,\mu)$, $g_k \in L^\infty(M,\mu)$ mit

$$\|u_{n_1}\|_{1+\infty} > \|h_1\|_1 + \|g_1\|_\infty + \frac{1}{2}\|u_{n_1}\|_{1+\infty},$$
$$\|u_{n_k} - u_{n_{k-1}}\|_{1+\infty} > \|h_k\|_1 + \|g_k\|_\infty + \frac{1}{2}\|u_{n_k} - u_{n_{k-1}}\|_{1+\infty}, \quad k > 1.$$

Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^n \|g_k\|_1 + \|h_k\|_\infty \leq \sum_{k=1}^n \|u_{n_k} - u_{n_{k-1}}\|_{1+\infty} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2},$$

wobei $u_{n_0} \equiv 0$. Wegen der Vollständigkeit von $L^1(M,\mu)$ und $L^\infty(M,\mu)$ existieren Grenzfunktionen $h \in L^1(M,\mu)$ und $g \in L^\infty(M,\mu)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g_k = g, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} h_k = h.$$

Es gilt nun:

$$\|u_{n_k} - (h+g)\|_{1+\infty} \leq \| \sum_{l=1}^{k} h_k - h\|_1 + \| \sum_{l=1}^{k} g_k - g\|_\infty \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

Aufgabe G3

Sei $f \in BUC(\mathbb{R}^d)$ und $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Mollifier. Zeigen Sie, dass $\rho_n * f \to f$ in $BUC(\mathbb{R}^d)$ (d.h. gleichmäßig).

Lösung: vgl. Beweis von Lemma 7.12 der Vorlesung.

Hausübung

Aufgabe H1

Für $h \in \mathbb{R}^d$ betrachte man den Operator T_h, definiert durch

$$(T_h f)(x) = f(x+h), \qquad f \in L^p(\mathbb{R}^d),\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Beweisen Sie die Stetigkeit von $T_h : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ und der Funktion $\mathbb{R}^d \ni h \mapsto T_h f$ für $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Lösung: Die Stetigkeit von T_h folgt aus $\|T_h f\|_p = \|f(\cdot+h)\|_p = \|f\|_p$.

Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\varphi - f\|_p \leq \varepsilon$. Da φ gleichmässig stetig ist, existiert ein $h_0 > 0$ mit

$$\|\varphi(\cdot+h) - \varphi\|_p \leq \tilde{\varepsilon}|\text{supp}\,\varphi|^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon, \quad h \leq h_0.$$

Daher folgt:

$$\|f(\cdot+h) - f\|_p \leq \|f(\cdot+h) - \varphi(\cdot+h)\|_p + \|\varphi(\cdot+h) - \varphi\|_p + \|\varphi - f\|_p \leq 3\varepsilon, \quad h \leq h_0$$

Aufgabe H2

Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Zeigen sie, dass $L^1(\mathbb{R}^d)$, versehen mit den Operationen $f+g$, $f*g$, eine kommutative Banachalgebra ist, welche keine Einselement besitzt.

Lösung: Nachrechen der Definition zeigt, dass $L^1(\mathbb{R}^d)$ eine kommutative Banchalgebra ist.

Angenommen, es existiert ein $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $g * f = f$ für alle $f \in L^1$. Dann gilt nach der Vorlesung für einen Mollifier (ρ_n)

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \rho_n * g = g.$$

Nach der Vorlesung, existiert eine Teilfolge $(\rho_{n_k}) \subset (\rho_n)$, die fast überall pktw. konvergiert, d.h. $g \equiv 0$, was offensichtlich ein Widerspruch ist.