Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
WS 2006/07
24.11.2006

5. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $1 \le p_i \le \infty$, $f_i \in L^{p_i}$ für $i = 1, \dots, n$. Sei ferner $1 \le p \le \infty$ so, dass $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$. Dann gilt

$$\prod_{i=1}^n f_i \in L^p \quad \text{und} \quad \Big\| \prod_{i=1}^n f_i \Big\|_{L^p} \le \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{p_i}}.$$

Lösung: (vollst. Induktion)
$n = 1$ klar.
$n = 2$: Mit der Hölderschen Ungleichung erhalten wir:

$$\int |f_1 f_2|^p \le (\int |f_1|^{p\tilde{p}_1})^{\frac{1}{\tilde{p}_1}} (\int |f_2|^{p\tilde{p}_2})^{\frac{1}{\tilde{p}_2}} = \|f_1\|^p_{L^{p_1}} \|f_2\|^p_{L^{p_2}},$$

wobei $p_i = p\tilde{p}_i$, $i = 1, 2$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und es gelte die Behauptung für dieses n. Dann gilt:

$$\left\| \prod_{i=1}^{n+1} f_i \right\|_{L^p} \overset{\text{Fall } n=2}{=} \|f_{n+1}\|_{L^{p_{n+1}}} \left\| \prod_{i=1}^{n} f_i \right\|_{L^{\tilde{p}}} \overset{(IV)}{=} \prod_{i=1}^{n+1} \|f_i\|_{L^{p_i}},$$

wobei $1/p_{n+1} + 1/\tilde{p} = 1/p$, d.h. $1/\tilde{p} = \sum_{i=1}^n 1/p_i$.

Aufgabe G2

Es sei $X := C([0, 2])$ und $\varphi \in X'$ definiert durch

$$\varphi(f) := \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Man zeige, dass kein $f \in C([0,2])$ existiert mit $\|f\| \leq 1$ und $|\varphi(f)| = \|\varphi\|$.

(b) Geben Sie Beispiele von unstetigen linearen Funktionalen auf normierten Räumen an.

Lösung:

(a) Die Gleicheit gilt nur für die Funktion $f = \chi_{[0,1]} - \chi_{[1,2]}$, welche aber unstetig ist.

(b) i. Aus dem Zornschen Lemma folgt, dass jeder Vektorraum ein Basis besitzt. Betrachte einen unendlichdimesionalen Vektorraum und eine Basis, die aus Einheitsvektoren besteht. Definiere das gewünschte Funktional so, dass es auf diesen Basisvektoren unbeschränkt wird.

ii. $X = c_{00}$, $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_n$.

Aufgabe G3

Sei X ein normierter Raum. Zeigen Sie:

(a) X' trennt die Punkte von X.

(b) Normkonvergenz impliziert schwache Konvergenz.

(c) Die Umkehrung von (b) gilt nicht.

(d) $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ in X, dann $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

Lösung:

(a) Sei $x \neq y \in X$. Dann existiert nach Kor. 4.6(a) ein $\varphi' \in X'$ mit $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, d.h. X' trennt die Punkte von X.

(b) Sei $(x_n) \subset X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\varphi \in X'$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi(x_n) - \varphi(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \|\varphi\|\|x_n - x\| = 0,$$

d.h. $\sigma - \lim_{n\to\infty} x_n = x$.

(c) Gegenbeispiel: Sei $1 < p < \infty$. Dann gilt $\|\delta_n\| = 1 \not\to 0$ für $n \to \infty$.
Aber: Sei $\varphi \in (\ell^p)'$. Dann existiert ein $x \in \ell^q$ $(1/q + 1/q = 1)$ mit $\varphi(y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$, $y \in \ell^p$. Daraus folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(\delta_n) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(\delta_n)_i = \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

(d) Sei $\varphi \in X'$ mit $\varphi(x) = \|x\|$ und $\|\varphi\| = 1$. Wähle $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ mit

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_{n_k}\|.$$

Dann gilt:

$$\|x\| = \varphi(x) = \lim_{k\to\infty} |\varphi(x_{n_k})| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_{n_k}\| = \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Hausübung

Aufgabe H1

Betrachte $L^p((0,1)^d)$ und $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Für welche $1 \le p \le \infty$ liegt f in L^p?

Lösung: Mit Hilfe von Kugelkoordinaten berechnet man:

$$\int\limits_{[0,1]^d} |x|^{\alpha p} \,\mathrm{d}x = C \int\limits_0^1 r^{\alpha p} r^{d-1} \,\mathrm{d}r = \begin{cases} \tilde{C} \log(r)|_0^1 & , \quad \alpha p + d = 0, \\ \tilde{C} r^{\alpha p + d}|_0^1 & , \quad \text{sonst,} \end{cases}$$

d.h $f \in L^p((0,1)^d)$ gdw. $\alpha p + d > 0$.

Aufgabe H2

Sei (M, Σ, μ) ein endlicher Maßraum.

(a) Sei $1 \le r \le p \le \infty$. Beweisen Sie, dass $L^p(M,\mu) \subseteq L^r(M,\mu)$. Bestimmen Sie die Einbettungskonstante.

(b) Sei $\mu(M) = 1$ und $f \in \bigcap_{p \ge 1} L^p(M,\mu)$ mit $\sup_{p\ge 1} \|f\|_{L^p(M,\mu)} \le M$. Dann gilt

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

Hinweis: Für $C > 0$ gilt: $\mu\{f > C\}^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{C}\|f\|_{L^p}$.

Lösung:

(a) Nach Aufgabe G1 gilt:

$$\|f\|_{L^r} \le \|1\|_{L^s} \|f\|_{L^p} \le |\mu(M)|^{\frac{1}{s}} \|f\|_{L^p}$$

mit $1/s + 1/p = 1/r$.

(b) Nach (a) ist $\|f\|_{L^p}$ monoton wachsend in p, d.h. $\lim_{n\to\infty} \|f\|_{L^p}$ existiert. Wir bezeichnen den GW mit K.

<u>Beh.:</u> $\|f\|_{L^\infty} \le K$

Sei $C > 0$ mit $\mu\{f > C\} \neq 0$. Dann folgt:

$$\mu\{f > C\}^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{C}\|f\|_{L^p}, \quad p \ge 1.$$

Insbesondere,

$$1 = \lim_{p\to\infty} \mu\{f > C\}^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{C} \lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} = \frac{K}{C},$$

d.h. $C \le K$.

$\|f\|_{L^\infty} \ge K$ folgt aus (a).

Aufgabe H3

Betrachte die Menge A von stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{K}$, welche

$$\int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

erfüllen. Ist A dicht in $C([0,1])$? Begründung!

Lösung: Da $\varphi(f) := \int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ ein stetiges Funktional auf $C([0,1])$ definiert, ist A abgeschlossen. Offenbar ist $A \neq C([0,1])$, also ist A nicht dicht in $C([0,1])$.