Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
17.11.2006

4. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Bestimmen Sie die Dualräume von ℓ^p für $p \geq 1$.

(b) Zeigen Sie, dass stetige lineare Funktionale $\varphi \in (\ell_\infty)'$ existieren, die $\varphi((a_n)) = \lim_{n\to\infty} a_n$ erfüllen für alle $(a_n) \in c$.

(c) Für $y = (y_n) \in \ell^1$ sei $\varphi_y : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(x_n) \mapsto \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$. Zeigen Sie, dass $\varphi_y \in (\ell^\infty)'$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass $y \mapsto \varphi_y$ eine normerhaltende lineare Abbildung ist, aber nicht surjektiv auf $(\ell^\infty)'$ ist.

(e) Zeigen Sie, dass c_0 und ℓ^1 nicht reflexiv sind.

Lösung:

(a) Sei $1/p + 1/q = 1$. Dann ist die Abbildung $J : \ell^q \to (\ell^p)'$ definiert durch

$$(Jx)(y) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$$

ein isometrischer Isomorphismus. Klar ist die Linearität von J. Für jedes $x \in \ell^q$ gehört Jx zu $(\ell^p)'$, denn Jx ist natürlich linear und es gilt (Hölder Ungleichung):

$$|(Jx)(y)| \leq \sum_{n=1}^\infty |x_n y_n| \leq \|x\|_{\ell^q} \|y\|_{\ell^p}.$$

<u>Beh.:</u> $\|Jx\| = \|x\|_{\ell^q}$.
Sei $q < \infty$ und setze $y_n^N := x_n |x_n|^{q-2}$, $n \leq N$, und $y_n^N = 0$, $n > N$. Dann gilt:

$$\|y^N\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^N |x_n|^p |x_n|^{(q-2)p} \right)^{\frac{1}{p}} = \|(x^N)\|_{\ell^q}^{\frac{q}{p}} = \|(x^N)\|_{\ell^q}^{q-1},$$

wobei $x_n^N := x_n$, $n \leq N$, und $x_n^N = 0$, $n > N$. Damit folgt:

$$\|J(x)(y^N)\| = \sum_{n=1}^{N} |x_n|^q = \|x^N\|_{\ell^q}^q = \|(x^N)\|_{\ell^q}\|(y^N)\|_{\ell^p}.$$

Für $q = \infty$ betrachte δ_n.
Also ist J isometrisch, insbesondere injektiv.
Beh.: J ist surjektiv.
Sei $\varphi \in (\ell^p)'$ und setze $x_n := \varphi(\delta_n)$. Analog zu oben folgt:

$$\|(x^N)\|_{\ell q}^q = \sum_{n=1}^{N} x_n y_n = \varphi(y^N) \leq \|\varphi\|\|(y^N)\|_{\ell^p} = \|\varphi\|\|(x^N)\|_{\ell^q}^{q-1},$$

d.h. $\|(x^N)\|_{\ell q} \leq \|\varphi\|$. Der Fall $q = \infty$ geht analog. Wie in der Vorlesung folgt $Jx = \varphi$.

(b) Das Funktional $\varphi(x) := \lim_{n\to\infty} x_n$, definiert für $x \in c$, ist stetig. Nach Hahn–Banach erhalten wir eine stetige Fortsetzung auf ℓ^∞.

(c) Analog zu Teil (a).

(d) Beh.: J ist nicht surjektiv.
Sei φ wie in (b).
Ann.:$\exists (x_n) \in \ell^1$: $\varphi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.
Dann gilt $\lim_{x_n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ (setze $y = \delta_n$), welches ein Widerspruch zu $(x_n) \in \ell^1$ darstellt.

(e) Folgt aus Teil (a) und (d).

Aufgabe G2

Sei $\alpha \in (0,1)$. Die Funktion $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$k(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{|x-y|^\alpha} & x \neq y \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $f \in C([0,1])$ sei T definiert durch

$$(Tf)(x) := \int_0^1 k(x,y) f(y)\, \mathrm{d}y.$$

(a) Zeigen Sie, dass T ein stetiger Operator auf $C([0,1])$ ist.

(b) Ist T kompakt?

(c) Sei $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{K}$ stetig. Für $f \in C(I)$ definiere

$$(Sf)(x) := \int_0^x k(x,y) f(y)\, \mathrm{d}y, \qquad x \in [0,1].$$

Zeigen Sie, dass T kompakt ist.

Lösung:

(a) Steht im Buch von Werner, Seite 53–54.

(b) Ja, der Operator ist kompakt. Siehe auch Werner, Seite 53–54, und wende dann Arzelà–Ascoli an.

(c) Der Operator hier heißt Volterra-Operator, und mit Arzelà–Ascoli ist es leicht zu zeigen, dass er kompakt ist.

Aufgabe G3

Zeigen Sie, dass ein lineares Funktional $\varphi : X \to \mathbb{K}$ stetig ist genau dann, wenn $\ker \varphi$ abgeschlossen ist. Ist $\ker \varphi$ nicht abgeschlossen, dann ist er sogar dicht in X.

Lösung: Ist φ stetig, dann ist $\ker \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen, denn $\ker \varphi$ ist das Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ unter einer stetigen Funktion.

Sei nun $\ker \varphi$ abgeschlossen. Dann ist $[\varphi] : X/\ker \varphi \to \mathbb{K}$ wohldefiniert und injektiv. Außerdem ist $\dim X/\ker \varphi \leq 1$ und $[\varphi]$ stetig (da es linear auf einem endlich dimensionalen Raum ist). Somit ist auch $\varphi = [\varphi] \circ q$ stetig, wobei q die Quotientenabbildung bezeichnet.

Sei jetzt φ unstetig. Wir zeigen, dass $\ker \varphi$ dicht ist. Da φ unbeschränkt ist, existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $\|x_n\| \leq 1$ und $|\varphi(x_n)| \geq n$. Für $y \in X$ setze $y_n := y - x_n \varphi(y)/\varphi(x_n)$, dann gelten $y_n \in \ker \varphi$ und $y_n \to y$ für $n \to \infty$.

Hausübung

Aufgabe H1

Zeigen Sie, dass der Identitätsoperator $I : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ kompakt ist.

Lösung: Wende den Satz von Arzelà–Ascoli an um zu zeigen, dass

$$\{f : f \in C^1([0,1]),\ \|f\|_{C^1} \leq 1\}$$

relativ kompakt in $C([0,1])$ ist.

Aufgabe H2

(a) Sei $m \in \ell^\infty$ und $M : \ell^p \to \ell^p$ $(1 \leq p < \infty)$ sei definiert durch $(Mx) = m_n x_n$. Dann ist M kompakt genau dann, wenn $m \in c_0$.

(b) Widerlegen Sie anhand eines Gegenbeispiels die folgende Behauptung: Ist (T_n) eine Folge kompakter Operatoren auf einem Banachraum X und existiert $Tx := \lim T_n x$ für alle $x \in X$, dann ist T kompakt.

Lösung:

(a) Sei $m \in c_0$. Dann existiert $m^n \in c_{00}$ mit $\|m^n - m\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$. Definiere M_n analog zu M durch Multiplikation mit m^n. Dann gilt $\dim \operatorname{im}(M_n) < \infty$, also ist M_n kompakt. Die Operatoren M_n konvergieren gegen M bezüglich der Operatornorm, also M muss auch kompakt sein.

Umgekehrt, sei M kompakt.
Ann.: $m \notin c_0$,
d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 : \exists (n_k) \subset \mathbb{N} : \lim_{k\to\infty} n_k = \infty,\ m_{n_k} > \varepsilon.$$

Dann gilt: $|M\delta_{n_k}| > \varepsilon$, $k \in \mathbb{N}$. Also folgt:

$$\|M\delta_{n_k} - M\delta_{n_l}\|_{\ell^p} = 2^{\frac{1}{p}}\varepsilon,$$

was ein Widerspruch zur Kompaktheit von M ist.

(b) Sei zum Beispiel $X = \ell^2$ und $T_n x := (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Dann konvergiert $T_n x$ gegen x für jede $x \in X$, aber der Identitätsoperator ist nicht kompakt, obwohl die Folge (T_n) aus kompakten Operatoren (denn sie haben endlichen Rang) besteht.