Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
10.11.2006

3. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Seien X, Y normierte Vektorräume und Y vollständig, $D \subseteq X$ ein dichter Unterraum und $T : D \to Y$ ein beschränkter linearer Operator. Zeigen Sie: T hat eine eindeutige stetige Fortsetzung auf X.

(b) Sei $c_{00} := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_n \neq 0$ für höchstens endlich viele $n\}$. Zeigen Sie: c_{00} ist dicht in ℓ^p, $1 \leq p < +\infty$, und in c_0.

(c) Sei $(m_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und definiere den linearen Operator $M : c_{00} \to c_{00}$ durch $M(x_n) = (m_n x_n)$. Zeigen Sie, dass so tatsächlich ein linearer Operator definiert wird. Welche Bedingungen muss man an (m_n) stellen, damit M bezüglich der ℓ^p-Norm $(1 \leq p < \infty)$ beschränkt wird. Geben Sie die Fortsetzung von M auf ℓ^p an.

Lösung:

(a) Sei $x \in X$ und $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to x$. Da T beschränkt auf D ist, ist $(Tx_n) \subseteq Y$ ein Cauchyfolge, also auch konvergent gegen ein y, da Y vollständig ist. Definiere die Fortsetzung so: $Tx := y$. Seien $(x_n^1), (x_n^2) \subset X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n^1 = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = x$. Dann gilt:

$$\|Tx_n^1 - Tx_n^2\| \leq \|T\| \|x_n^1 - x_n^2\| \to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

d.h. die Fortsetzung ist wohldefiniert. Die Linearität ist trivial und die Stetigkeit der Fortsetzung folgt aus

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| \leq \|T\| \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|T\| \|x\|, \quad x \in X.$$

Die Eindeutigkeit ist klar.

(b) Nach Definition von ℓ^p gilt das Folgende. Für $(x_n) \in \ell^p$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $(\sum_{k=N}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$. Setze $a_n := x_n$, falls $n \leq N$, und $a_n = 0$ sonst. Dann gilt $(a_n) \in c_{00}$ und $\|(x_n) - (a_n)\|_p \leq \varepsilon$. Der Fall von c_0 ist analog.

(c) Linearität ist klar. Falls $(m_n) \in \ell^\infty$, ist der Operator beschränkt, und hat eine stetige Fortsetzung auf ℓ^p, die auch noch durch die obige Multiplikation gegeben ist. Umgekehrt muss (m_n) beschränkt sein, denn betrachte $\delta_n \in \ell^p$. Dann gilt $M\delta_n = (0, 0, \dots, m_n, \dots)$ und $\|\delta_n\|_p = 1$, also folgt aus $|m_n| = \|M\delta_n\| \leq \|M\|$ die Beschränktheit von (m_n).

Aufgabe G2

(a) Sei $(a_{ij}) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ eine unendliche Matrix. Setze

$$(Tx)_i := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j, \qquad i \in \mathbb{N},\ x \in c_{00}.$$

Zeigen Sie, dass T genau dann ein beschränkter Operator bezüglich der ℓ^1-Norm auf c_{00} ist, wenn

$$\sup_{j\geq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| < +\infty.$$

(b) Geben Sie die Fortsetzung von T auf ℓ^1 an.

Lösung:

(a) Sei $x \in c_{00}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \|Tx\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \Big| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j \Big| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij} x_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij} x_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| \leq \sup_{j\geq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| \cdot \|x\|_1, \end{aligned}$$

also $\|T\| \leq \sup_{j\geq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|$. Betrachte die Folge $\delta_n \in c_{00}$, d.h. $\delta_n^i = \delta_{in}$. Dann gilt $(T\delta_n)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \delta_{ni} = a_{in}$ und $\|\delta_n\|_1 = 1$. Dies zeigt, dass $\sup_{j\geq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| \leq \|T\| < +\infty$, falls $T : \ell^1 \to \ell^1$ stetig ist. Umgekehrt:

(b) Die Fortsetzung ist auch durch

$$(Tx)_i := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j, \qquad i \in \mathbb{N},$$

gegeben.

Aufgabe G3

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ heißt *unterhalbstetig*, falls für jede konvergente Folge $(x_n) \subseteq X$ mit $\lim_{x\to\infty} x_n = x$, gilt

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x).$$

(a) Zeigen Sie, dass eine unterhalbstetige Funktion auf jeder kompakten Menge eine Minimalstelle hat.

(b) Sei $\mathcal{F}$ eine Menge von stetigen Funktionen auf X. Zeigen Sie, dass

$$g(x) := \sup_{f\in\mathcal{F}} f(x)$$

eine unterhalbstetige Funktion ist.

Lösung:

(a) Sei $x_n \in K$ so, dass $f(x_n) \leq \inf_K f + 1/n$. Wegen der Kompaktheit finden wir eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}), die etwa gegen $x \in K$ konvergiert. Dann gilt $\inf_K f = \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x)$, also $f(x) = \inf_K f$.

(b) Sei $x_n \to x$. Es gilt $f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq \liminf_{n\to\infty} g(x_n)$. Daraus folgt auch $g(x) \leq \liminf_{n\to\infty} g(x_n)$.

Hausübung

Aufgabe H1

Es sei $X := \ell^p$, $1 \leq p \leq \infty$. Die Operatoren R, L seien definiert durch

$$\begin{aligned} R : (x_1, x_2, \dots) &\quad\mapsto\quad (0, x_1, x_2, \dots) \\ L : (x_1, x_2, \dots) &\quad\mapsto\quad (x_2, x_3, \dots). \end{aligned}$$

Betrachte auch den Operator M aus Aufgabe G1(c), und setze $T := ML$.

(a) Zeigen Sie, dass R, L, M, T beschränkt sind und bestimmen Sie die jeweiligen Operatornormen.

(b) Es gelte außerdem $|m_1| \geq |m_2| \geq \cdots$. Für $n \in \mathbb{N}$ bestimme man die Operatornormen von R^n, L^n, M^n, T^n.

Aufgabe H2

Sei X ein normierter Raum und $S, T : X \to X$ lineare Abbildungen mit der Eigenschaft $ST - TS = Id$. Zeigen Sie, dass S oder T unstetig ist.