Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
03.11.2006

2. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

Zwei normierte Vektorräume $(X, \|\cdot\|)$ und $(Y, |||\cdot|||)$ heißen isometrisch isomorph ($X \simeq Y$), falls ein linearer (algebraischer) Isomorphismus J zwischen X und Y existiert, welcher auch eine Isometrie ist, d.h. $|||Jx||| = \|x\|$. Zeigen Sie: X ist vollständig, genau dann, wenn Y vollständig ist.

Lösung: Einfach die Definition von Vollständigkeit hinschreiben!

Aufgabe G2

Zeigen Sie: Auf einem endlichdimensionalen Raum sind je zwei Normen äquivalent.
Lösung: Betrachte die euklidische $\|\cdot\|_2$ sowie eine andere beliebige Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^d$. Sei e_i, $i = 1, \dots, d$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^d$. Für $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$ gilt dann $x = \sum_{i=1}^d \alpha_i e_i$. Setze $K = \max\{\|e_i\| : 1 \leq i \leq d\}$. Dann

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^d \|\alpha_i e_i\| = \sum_{i=1}^d |\alpha_i| \|e_i\| \leq K \sum_{i=1}^d |\alpha_i| \leq K\sqrt{d}\Big(\sum_{i=1}^d |\alpha_i|^2\Big)^{1/2} = K\sqrt{d}\|x\|_2.$$

Dies zeigt $\|x\| \leq K'\|x\|_2$.

Da S_2 kompakt in $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ ist und $x \mapsto \|x\|$ eine stetige Funktion ist, hat sie ein Minimum $M \neq 0$ auf S_2. Dann gilt für $0 \neq x \in \mathbb{R}^d$,

$$M \leq \Big\|\tfrac{x}{\|x\|_2}\Big\|, \quad \text{also} \quad \|x\|_2 \leq \frac{\|x\|}{M}.$$

Aufgabe G3

Für $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ setze

$$V((a_n)) = \sum_{n=1}^\infty |a_{n+1} - a_n|.$$

Sei $bv := \{(a_n) : V((a_n)) < +\infty\}$. Zeigen Sie, dass $bv \subseteq c$ und $(bv, \|\cdot\|_{bv})$ ein Banachraum ist, wobei $\|(a_n)\|_{bv} := \lim_{k\to\infty} |a_k| + V((a_n))$.

Lösung: Sei $n \geq m$. Dann $a_{n+1} - a_m = \sum_{k=m}^{n}(a_{k+1} - a_k)$. Daraus folgt $|a_{n+1} - a_m| \leq \sum_{k=m}^{n} |(a_{k+1} - a_k)| \leq \varepsilon$, falls n, m groß genug sind und $(a_n) \in bv$. Dies zeigt, dass (a_n) eine Cauchyfolge ist, also $(a_n) \in c$. Die Ungleichungen

$$\lim_{n\to\infty} |a_n + b_n| \leq \lim_{n\to\infty} |a_n| + \lim_{n\to\infty} |b_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty}$$

$$|a_{n+1} + b_{n+1} - a_n - b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_{n+1} - b_n|$$

zeigen, dass $\|\cdot\|_{bv}$ eine Norm ist, denn die andere Eigenschaften einer Norm sind noch leichter zu überprüfen.

Zunächst betrachten wir $bv_0 = bv \cap c_0$ und beweisen dass bv_0 bezüglich $\|\cdot\|_{bv}$ vollständig ist. Notation $a_0 := 0$. Betrachte $J : bv_0 \to \ell^1$, definiert durch $(J(a_n))_k = a_k - a_{k-1}$, falls $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\|a_n\|_{bv} = \|J(a_n)\|_{\ell^1}$. Natürlich ist J linear. Ferner ist es injektiv, denn es ist normerhaltend. Wir zeigen noch die Surjektivität von J. Sei $(b_k) \in \ell^1$, dann existiert dann $s := \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Setze $a_n := \sum_{k=1}^{n} b_k - s$, so gilt $J(a_n) = (b_n)$. Wir haben gezeigt, dass bv_0 und ℓ^1 isometrisch isomorph sind, deswegen bv_0 ist auch ein Banachraum. Schließlich ist $bv = bv_0 \oplus_1 \operatorname{span}\{\mathbf{1}\}$ und die Vollständigkeit von bv folgt.

Hausübung

Aufgabe H1

Seien $(X, \|\cdot\|)$ und $(Y, |||\cdot|||)$ normierte Vektorräume und $1 \leq p \leq \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\|(x,y)\|_p := \begin{cases} \Big(\|x\|^p + |||y|||^p\Big)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \max\{\|x\|, |||y|||\} & p = \infty. \end{cases}$$

eine Norm auf $X \times Y$ definiert. Das Paar $(X \times Y, \|(\cdot,\cdot)\|_p)$ wird mit $X \underset{p}{\oplus} Y$ bezeichnet.

(b) Die Normen $\|(\cdot,\cdot)\|_p$ sind äquivalent auf $X \times Y$.

(c) Sind X und Y vollständig, so ist $X \oplus_p Y$ vollständig.

Lösung:

(a) Die Eigenschaften einer Norm sind einfach zu überprüfen.

(b) Folgt wie in Aufgabe G2.

(c) Falls $((x_n, y_n)) \subseteq X \times Y$ eine Cauchyfolge ist, sind $(x_n) \subseteq X$ und $(y_n) \subseteq Y$ auch Cauchyfolgen. Nach Voraussetzung konvergieren sie gegen x bzw. y. Aber dann konvergiert (x_n, y_n) gegen (x, y).

Aufgabe H2

Zeigen Sie: eine Menge $\mathcal{A} \subseteq c_0$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist und die folgende Eigenschaft besitzt: für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $(a_n) \in \mathcal{A}$ $|a_n| \leq \varepsilon$ gilt.

Lösung: Sei $\mathcal{A}$ kompakt. Dann ist A abgeschlossen und beschränkt nach Satz 2.6 der Vorlesung.
Annahme: Für ein $\varepsilon > 0$ und alle $k \in \mathbb{N}$ existiert $(a_n^k) \subset \mathcal{A}$: $|a_k^k| > \varepsilon$.
Setze $(b_n^1) = (a_n^1)$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n^1| \leq \varepsilon/2$ for $n \geq n_0$. Setze nun $(b_n^2) = (a_n^{n_0})$. Dann existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\max |b_n^1|, |b_n^2| \leq \varepsilon/2$ für $n \geq n_1$. Setze nun $(b_n^3) = (b_n^{n_1})$ und so weiter. Offenbar gilt $|b_n^i - b_n^k| > \varepsilon/2$ für $i \neq k$, insbesondere kann es keine konvergente Teilfolge geben, ein Widerspruch zur Kompaktheit von $\mathcal{A}$.

Sei nun $\mathcal{A}$ abgeschlossen, beschränkt und für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| \leq \varepsilon$ für $(a_n) \in \mathcal{A}$ und $n \geq n_0$. Beachte: Es genügt zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ folgenkompakt ist. Sei $(a_n^k) \subset \mathcal{A}$. Da $\mathcal{A}$ beschränkt ist, existiert eine Teilfolge (a_n^k) mit $\lim_{i \to \infty} a_n^{k_i} = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Wieso?). Für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|(a_n^{k_i}) - (a_n)\|_\infty \leq \max_{1 \leq n \leq n_0} |a_n^{k_i} - a_n| + \max_{n > n_0} |a_n^{k_i} - a_n|.$$

Nach Voraussetzung existiert für $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$: $\max_{n > n_0} |a_n^{k_i} - a_n| < \varepsilon$, $i \in \mathbb{N}$. Wähle nun i_0 so groß, dass $\max_{1 \leq n \leq n_0} |a_n^{k_i} - a_n| \leq \varepsilon$ für $i > i_0$. Dann gilt: $\|(a_n^{k_i}) - (a_n)\|_\infty \stackrel{i \to \infty}{\to} 0$. Da $\mathcal{A}$ abgeschlossen, folgt $(a_n) \in \mathcal{A}$.