Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
WS 2006/07
27.10.2006

1. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Für $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ sei

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{d} |x_i|, \quad \|x\|_2 := \Big(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2\Big)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty := \max_{1\le i\le d} |x_i|.$$

   i. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$, $p = 1, 2, \infty$ Banachräume sind.
   ii. Skizzieren Sie für $d = 2$ die "Einheitskugeln" $B_p := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_p \le 1\}$.

(b) Zeigen Sie, dass l^∞ ein Banachraum ist.

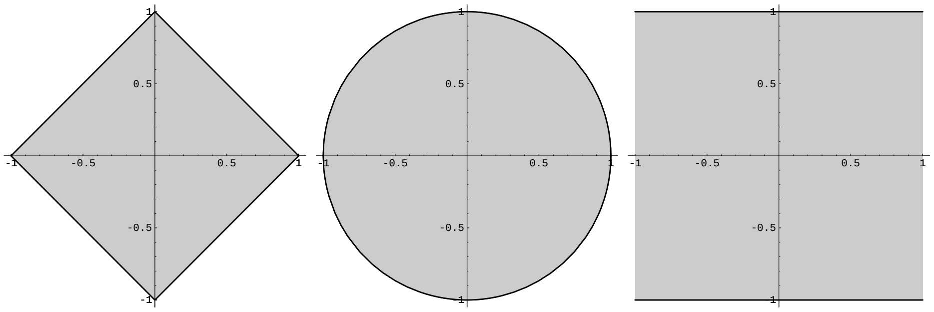
(c) Sei $1 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass l_p vollständig ist.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $l_p \subset l_\infty$ und $\|\cdot\|_\infty \le \|\cdot\|_p$.

Lösung:

(a) i. (N2) und (N3) sind klar. Sei $x, y \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_1 &= \sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i| \le \sum_{i=1}^{d} |x_i| + \sum_{i=1}^{d} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1. \\
\|x+y\|_\infty &= \max_{1\le i\le d} |x_i + y_i| \le \max_{1\le i\le d} |x_i| + \max_{1\le i\le d} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty. \\
\|x+y\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^2 \le \sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i| \cdot |x_i| + \sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i| \cdot |y_i| \\
&\le \Big(\sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^2 \sum_{i=1}^{d} |x_i|^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^2 \sum_{i=1}^{d} |y_i|^2\Big)^{1/2} \\
&= \|x+y\|_2 \cdot \|x\|_2 + \|x+y\|_2 \cdot \|y\|_2.
\end{aligned}$$

Also sind alle drei VR normierter Räume. Bemerkung: falls $(x^k) \in (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ konvergente bzw. Cauchyfolge ist, sind die Koordinatenfolgen (x_i^k) $(i = 1, \dots, d)$ auch konvergent bzw. Cauchy. Die Umkehrung ist auch wahr: z.B. sei $(x_d) \subseteq (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ eine Folge so, dass (x_i^k) $(i = 1, \dots, d)$ eine Cauchy (bzw. konvergente) Folge ist. Dann ist (x^k) eine Cauchy bzw. konvergente Folge in $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ (die Falle $p = 1, 2$ zeigt man analog). Dies zeigt die Vollständigkeit der Räume.

ii. 

(b) Es ist einfach zu zeigen, dass $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm ist (siehe Teil (a)). Sei $((x_n))^k \subseteq l^\infty$ eine Cauchyfolge. Dann (wie im Teil a) konvergieren $x_n^k \to y_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ für $k \to \infty$. Außerdem gilt:

$$|y_n| = \lim_{k\to\infty} |x_n^k| \le \sup \|x^k\|_\infty < \infty$$

(eine CF ist beschränkt). Daher ist $(y_n) \in l^\infty$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$|x_n^m - x_n^k| \le \|x^m - x^k\|_\infty \le \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\, m, k \ge n_0.$$

Nun betrachten wir den Grenzwert $m \to \infty$. Dann erhalten wir

$$|y_n - x_n^k| \le \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ falls } k \ge n_0.$$

Daher ist $\|(y_n) - (x_n)^k\|_\infty \le \varepsilon$ für alle $k \ge n_0$.

(c) Es gilt

$$\|(a_n)\|_{l_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \le (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} = \|(a_n)\|_{l_p}, \quad (a_n) \in l_p. \tag{1}$$

Insbesondere folgt damit $l_p \subset l_\infty$.
Sei (a_k^n) eine CF in l_p. Dann ist (a_n) eine CF in l_∞ (vgl. (1)). Nach (b) existiert $(b_n) \in l_\infty$ mit

$$\|(a_n)^k - (b_n)\|_\infty \overset{k\to\infty}{\to} 0. \tag{2}$$

<u>Beh.</u>: $(b_n) \in l_p$
Bew.: Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt: (Beachte, dass jede CF beschränkt ist!)

$$\left(\sum_{n=1}^{m} |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{n=1}^{m} |b_n - a_n^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{m} |a_n^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \overset{(2)}{\le} \varepsilon + K,$$

d.h. $(b_n) \in l_p$.
<u>Beh.</u>: $\|(a_n)^k - (b_n)\|_p \overset{k\to\infty}{\to} 0$
Bew.: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ (wieso?):

$$\left(\sum_{n\geq n_0}^{\infty} |a_n^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n\geq n_0}^{\infty} |a_n^k - a_n^{n_0}|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n\geq n_0}^{\infty} |a_n^{n_0}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon, \quad k > n_0. \tag{3}$$

Dann existiert nach (2) und (3) zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|(b_n) - (a_n)^k\|_p \leq \left(\sum_{n=1}^{l-1} |b_n - a_n^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=l}^{\infty} |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=l}^{\infty} |a_n^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

für alle $k \geq n_0$ (Welche Eigenschaft von (b_n) wird hier noch benutzt?).

Aufgabe G2

Es sei $X := C([a,b])$ für $a < b$ und $\omega : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, nichtnegative Funktion. Wir setzen

$$p_\omega(f) := \sup\{\omega(s)|f(s)| : s \in [a,b]\}.$$

(a) Welche Bedingungen muss man an ω (genauer an $\omega^{-1}(\{0\})$) stellen, damit p_ω eine Norm ist?

(b) Es existiere $\varepsilon > 0$ so, dass $\omega(s) \geq \varepsilon$ für alle $s \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass (X, p_ω) ein Banachraum ist.

Lösung:

(a) Welche Eigenschaften einer Norm sind für jedes ω erfüllt? Positivität, Homogenität und die Dreieckungleichung sind klar, d.h. p_ω ist immer eine Halbnorm.
Zu Untersuchen ist, wann die Implikation "$p_\omega(f) = 0 \Longrightarrow f = 0$" gilt? Betrachte $\omega^{-1}(\{0\})$. Ist das Innere von $\omega^{-1}(\{0\})$ nicht leer, findet man eine positive, stetige Funktion $f \neq 0$ so, dass $f(s) = 0$ für $s \in [a,b] \setminus \omega^{-1}(\{0\})$. Daher $|f(s)|\omega(s) = 0$ für alle $s \in [a,b]$ aber $f \neq 0$, also ist p_ω keine Norm. Umgekehrt, nehmen wir an, dass p_ω keine Norm ist. Daraus folgt die Existenz einer stetigen Funktion $f \neq 0$ mit $\omega(s)f(s) = 0$. Deshalb gilt $[a,b] \setminus f^{-1}(\{0\}) \subseteq \omega^{-1}(\{0\})$. Dies zeigt dass, das Inneres von $\omega^{-1}(\{0\})$ nicht leer ist. Zusammenfassend: p_ω ist eine Norm genau dann wenn $\omega^{-1}(\{0\})$ leeres Inneres hat.

(b) Nach Aufgabe (a) ist p_ω eine Norm. Sei $(f_n) \subseteq C([a,b])$ eine Cauchyfolge bezüglich p_ω. Da $|f_n(s) - f_m(s)| = |\omega(s)f_n(s) - \omega(s)f_m(s)|/\omega(s) \leq p_\omega(f_n - f_m)/\varepsilon$ erhalten wir, dass (f_n) eine Cauchyfolge bezüglich der Supremumsnorm ist. Deswegen konvergiert sie auch in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ gegen ein f. Aus der Beschränktheit von ω folgt $p_\omega(f_n - f) \leq \sup \omega \cdot \|f_n - f\|_\infty$, und wir erhalten die Behauptung: $p_\omega(f_n - f) \to 0$. Bemerkung: was wir eigentlich bewiesen haben, ist die Äquivalenz der zwei Normen.

Aufgabe G3

Sei $\mathrm{Lip}([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} :\ f \text{ Lipschitz-stetig}\}$. Für $f \in \mathrm{Lip}([0,1])$ sei

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := |f(0)| + \sup_{x\neq y}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathrm{Lip}([0,1]), \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}})$ ein Banachraum ist.

Lösung: Sei $f, g \in \mathrm{Lip}([0,1])$.

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{\mathrm{Lip}} &= |f(0)+g(0)| + \sup_{x\neq y}\left|\tfrac{f(x)+g(x)-f(y)-g(y)}{x-y}\right| \\ &\le |f(0)| + |g(0)| + \sup_{x\neq y}\left|\tfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| + \sup_{x\neq y}\left|\tfrac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| = \\ &= \|f\|_{\mathrm{Lip}} + \|g\|_{\mathrm{Lip}}.\end{aligned}$$

Die anderen Eigenschaften einer Norm sind noch leichter zu zeigen. Sei $(f_n) \subseteq \mathrm{Lip}([0,1])$ eine Cauchyfolge und $x \in [0,1]$. Insbesondere gilt $\|f_n\|_{\mathrm{Lip}} \le K < \infty$. Es gilt

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_m(x)| &\le |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(0) - f_m(0))| + |f_n(0) - f_m(0)| \le \\ &\le \big(\|f_n - f_m\|_{\mathrm{Lip}} - |f_n(0) - f_m(0)|\big)x + |f_n(0) - f_m(0)| \le \|f_n - f_m\|_{\mathrm{Lip}} \le \varepsilon,\end{aligned}$$

falls n, m groß genug sind. Daher $f_n(x) \to g(x)$, denn $f_n(x)$ ist eine Cauchyfolge, also konvergent.

Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\|f_n - f_m\|_{\mathrm{Lip}} \le \varepsilon$, also

$$|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(y) - f_m(y))| \le \big(\|f_n - f_m\|_{\mathrm{Lip}} - |f_n(0) - f_m(0)|\big)|x-y| \le (\varepsilon - |f_n(0) - f_m(0)|\big)|x -$$

für alle $x, y \in [0,1]$, $n, m \ge n_0$. Sei $x, y, \in [0,1]$ und lasse $n \to \infty$. Dann erhalten wir

$$\big|(g(x) - f_m(x)) - (g(y) - f_m(y))\big| \le \big(\varepsilon - |g(0) - f_m(0)|\big)|x-y|,$$

d. h.

$$\frac{|(g(x) - f_m(x)) - (g(y) - f_m(y))|}{|x-y|} + |g(0) - f_m(0)| \le \varepsilon,$$

falls $m \ge n_0$. Dies zeigt $f_m \overset{\mathrm{Lip}}{\to} g$. Lasse in der obigen Ungleichung m gegen ∞ gehen, um $g \in \mathrm{Lip}([0,1])$ zu erhalten.

Hausübung

Aufgabe H1

Sei $f \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$ mit $f \ge 0$, $\|f\|_\infty = 1$ und $f(x) = 0$ für $x > \frac{1}{2}$. Zeigen Sie, dass

(a) $\exists K > 0$: $\max_{0\leq x\leq 1} |u_n(x)| \leq K$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\max_{0\leq x\leq 1} |u_n'(x)| \overset{n\to\infty}{\to} \infty$,

wobei $u_n(x) = c_n f(nx)/n$ mit $c_n > 0$ so, dass $\int_0^1 |u_n'(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 1$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $c_n > 0$ mit $\int_0^1 |u_n'(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 1$ existiert.

Lösung: Beh.: $c_n \overset{n\to\infty}{\to} \infty$
Bew.: Da f nicht konstant ist, existiert $x_0 \in (0,1)$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von f' existert $\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(y)|^2 \,\mathrm{d}y$ und ist ungleich 0 (Beachte: $f'(x_0) \neq 0$).

$$1 \overset{!}{=} \int_0^1 |u_n'(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 c_n^2 |f'(nx)|^2 \,\mathrm{d}x \overset{y=nx}{=} \int_0^n \frac{c_n^2}{n} |f'(y)|^2 \,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{c_n^2}{n} |f'(y)|^2 \,\mathrm{d}y.$$

Also, $c_n = (n/\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(y)|^2 \,\mathrm{d}y)^{\frac{1}{2}}$, insbesondere existiert $c_n > 0$ mit $\int_0^1 |u_n'(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 1$.
Beh.:$\exists K > 0 : \max_{0\leq x\leq 1} |u_n(x)| \leq K$
Bew.:

$$\max_{0\leq x\leq 1} |u_n(x)| = \max_{0\leq x\leq 1} |c_n f(nx)/n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Beh.:$\max_{0\leq x\leq 1} |u_n'(x)| \overset{n\to\infty}{\to} \infty$
Bew.: Da f nicht konstant ist, existiert ein $x_0 \in (0,1)$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Es folgt nun:

$$\max_{0\leq x\leq 1} |u_n'(x)| = \max_{0\leq x\leq 1} |c_n f'(n)| \geq c_n f'(x_0) \overset{n\to\infty}{\to} \infty.$$

Aufgabe H2

Für $a < b$ sei $X := C^1([a,b]) := \{f \in C([a,b]) :\ f$ stetig differenzierbar in $[a,b]\}$. Für $f \in X$ sei

$$\begin{aligned} p_1(f) &:= \sup\{|f(s)| : s \in [a,b]\}, \\ p_2(f) &:= \sup\{|f'(s)| : s \in [a,b]\}, \\ p_3(f) &:= |f(a)| + \sup\{|f'(s)| : s \in [a,b]\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie

(a) p_1 ist eine Norm auf X; p_2 ist keine Norm auf X.

(b) (X, p_1) ist kein Banachraum.

(c) (X, p_3) ist ein Banachraum.

Lösung:

(a) p_1 ist eine Norm auf $C([a,b])$. X ist dessen Unterraum, also ist p_1 eine Norm auch auf X. Betrachte eine konstante Funktion $f \neq 0$. Dann $f' = 0$, $p_2(f) = 0$, also kann p_2 keine Norm sein.

(b) X ist nicht abgeschlossen in $C([a,b])$, also auch kein Banachraum. Wähle hierzu z.B. $a = b = -1$ und $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

(c) Klar dass p_3 eine Norm ist.
Sei $(f_n) \subseteq (X, p_3)$ eine Cauchyfolge. Da insbesondere $(f_n') \subseteq C([a,b])$ eine Cauchyfolge in $C([a,b])$ ist, existiert $g \in C([a,b])$ mit $f_n' \to g$ für $n \to \infty$.
Außerdem ist $(f_n(a))$ eine CF in $\mathbb{R}$. Daher existiert $A \in \mathbb{R}$ mit $f_n(a) \to A$ für $n \to \infty$. Setze $f(x) := \int_a^x g'(s)\ \mathrm{d}s + A$. Dann ist f stetig differenzierbar mit $f' = g$ (Analysis I). Nach Konstruktion gilt $f_n \xrightarrow{p_3} f$.