Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
09.02.2007

14. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

Ist X ein Banachraum endlicher Dimension, so ist jeder injektive Operator auf X automatisch auch surjektiv und umgekehrt. Das gilt in beliebigen Banachräumen nicht. Geben Sie Beispiel von beschränkten, linearen Operatoren auf einem Banachraum an, die injektiv aber nicht surjektiv, bzw. surjektiv aber nicht injektiv sind.

Aufgabe G2

(a) Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und nicht leer. Zeigen Sie dass, es einen stetigen Operator T auf ℓ^2 gibt, für den $\sigma(T) = K$.
Hinweis: Multiplikatoren!

(b) Sei $X := L^2((0,1))$ und $Af := f'$ mit $D(A) := \{f \in H^1((0,1)) : f(1) = 0\}$. Zeigen Sie, dass A abgeschlossen ist. Bestimmen Sie das Spektrum von A.

Aufgabe G3

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ heißt *schnell fallend*, falls

$$\lim_{|x|\to\infty} x^\alpha f(x) = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d.$$

Der Raum

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : D^\alpha f \text{ schnell fallend für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}.$$

heißt Schwartzraum.

(a) Geben Sie Funktionen f an, die in $\mathcal{S}$ liegen.

(b) Zeigen Sie, dass $\Psi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.