Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
02.02.2007

13. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei $X := C([0,1])$ und $A : X \supset C^1([0,1]) \to X$, $Af = f'$. Berechnen Sie $\sigma(A)$ und $P\sigma(A)$.

Aufgabe G2

Es sei $X = C([0,1])$ und wir definieren für $g \in C([0,1])$ den Operator

$$M_g : X \to X, \quad f \mapsto gf.$$

(a) Zeigen Sie, dass $M_g \in \mathcal{L}(X)$ gilt und die Abbildung $\Phi : X \to \mathcal{L}(X)$, $g \mapsto M_g$ eine Isometrie ist.

(b) Bestimmen Sie zu vorgegebenem g das Spektrum von M_g

(c) Für $\lambda \in \varrho(M_g)$ geben Sie die Resolvente $R(\lambda, M_g)$ an.

(d) Unter welchem Annahme an g ist $P\sigma(M_g) \neq \emptyset$.

Aufgabe G3

Es sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $R\sigma(T) = P\sigma(T')$.

(b) Wenn T eine Isometrie ist, so gilt $A\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

Hausübung

Aufgabe H1

Es sei $X := \ell^2$, und $(m_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und wie definieren den lineare Operator $M(x_n) = (m_n x_n)$ mit maximalem Definitionsbereich, d.h. mit

$$D(M) := \{(x_n) \in \ell^2 : \ (m_n x_n) \in \ell^2\}.$$

Ferner seien die Operatoren R, L definiert durch

$$\begin{aligned} R : (x_1, x_2, \dots) &\quad\mapsto\quad (0, x_1, x_2, \dots) \\ L : (x_1, x_2, \dots) &\quad\mapsto\quad (x_2, x_3, \dots). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie den Spektralradius, das Punktspektrum, das approximative Punktspektrum und das Residualspektrum dieser Operatoren.

Aufgabe H2

(a) Sei $A : X \supset D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator und $\lambda - A$ bijektiv. Dann ist $\lambda \in \rho(A)$.

(b) Sei $A : X \supset D(A) \to X$ ein Operator und $\rho(A) \neq \emptyset$. Dann ist A abgeschlossen.