Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
26.01.2007

12. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

Seien X, Y Banachräume. Zeigen Sie die folgende Aussagen.

(a) Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ist abgeschlossen.

(b) gr (A) ist ein Unterraum von $X \times Y$.

(c) A ist abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ gr (A) ist abgeschlossen in $X \times Y$.

(d) Sei $A : X \supset D \to Y$ linear. Dann ist A abgeschlossen genau dann wenn D versehen mit der Graphnorm $\|x\|_A := \|x\|_X + \|Ax\|_Y$ ein Banachraum ist.

(e) Der Operator $A : (D, \|\cdot\|_A) \to Y$ ist stetig.

Aufgabe G2

Sei X ein normierter Vektorraum, $M \subseteq X$ und $M' \subseteq X'$. Beweisen Sie folgende Aussagen

(a) M ist beschränkt genau dann, wenn für jede $\varphi \in X'$ die Menge $\{|\varphi(x)| : x \in M\}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist.

(b) Jede schwach konvergente Folge ist beschränkt.

(c) Ist X ein Banachraum, so ist M' genau dann in X' beschränkt, wenn die Menge $\{|\varphi(x)| : \varphi \in M'\}$ für alle $x \in X$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist.

Aufgabe G3

Geben Sie Beispiele für eine Folge (T_n) von stetigen linearen Operatoren an, die punktweise aber nicht in der Operatornorm konvergieren.

Hausübung

Aufgabe H1

(a) In dem Banachraum $C([0,1])$ betrachten wir den lineare Operator A mit

$$A : D_1 \to C([0,1]), D_1 := C^1([0,1]) \text{ und } Af := f' \text{ für } f \in D_1;$$
$$A : D_2 \to C([0,1]), D_2 := C^\infty([0,1]) \text{ und } Af := f' \text{ für } f \in D_2;$$

Untersuchen Sie die beiden Operatoren (A, D_1) und (A, D_2) auf Abgeschlossenheit.

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und von der Klasse C^2, $D(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ und $\Delta : D(\Delta) \to L^2(\Omega)$ der Dirichlet-Laplace-Operator. Zeigen Sie, dass Δ abgeschlossen ist, aber NICHT zu einem stetigen Operator auf $L^2(\Omega)$ fortgesetzt werden kann.

Aufgabe H2

Zeigen Sie: ein Banachraum X ist entweder von endlichen Dimension, oder jede Basis ist überabzählbar.