



# 12. Übungsblatt zur PDG I: Funktionalanalytische Methoden

## Gruppenübung

### Aufgabe G1

Seien  $X, Y$  Banachräume. Zeigen Sie die folgende Aussagen.

- (a) Ein Operator  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  ist abgeschlossen.
- (b)  $\text{gr}(A)$  ist ein Unterraum von  $X \times Y$ .
- (c)  $A$  ist abgeschlossen  $\iff$   $\text{gr}(A)$  ist abgeschlossen in  $X \times Y$ .
- (d) Sei  $A : X \supset D \rightarrow Y$  linear. Dann ist  $A$  abgeschlossen genau dann wenn  $D$  versehen mit der Graphnorm  $\|x\|_A := \|x\|_X + \|Ax\|_Y$  ein Banachraum ist.
- (e) Der Operator  $A : (D, \|\cdot\|_A) \rightarrow Y$  ist stetig.

### Aufgabe G2

Sei  $X$  ein normierter Vektorraum,  $M \subseteq X$  und  $M' \subseteq X'$ . Beweisen Sie folgende Aussagen

- (a)  $M$  ist beschränkt genau dann, wenn für jede  $\varphi \in X'$  die Menge  $\{|\varphi(x)| : x \in M\}$  in  $\mathbb{R}$  beschränkt ist.
- (b) Jede schwach konvergente Folge ist beschränkt.
- (c) Ist  $X$  ein Banachraum, so ist  $M'$  genau dann in  $X'$  beschränkt, wenn die Menge  $\{|\varphi(x)| : \varphi \in M'\}$  für alle  $x \in X$  in  $\mathbb{R}$  beschränkt ist.

### Aufgabe G3

Geben Sie Beispiele für eine Folge  $(T_n)$  von stetigen linearen Operatoren an, die punktweise aber nicht in der Operatornorm konvergieren.

# Hausübung

## Aufgabe H1

(a) In dem Banachraum  $C([0, 1])$  betrachten wir den lineare Operator  $A$  mit

$$A : D_1 \rightarrow C([0, 1]), D_1 := C^1([0, 1]) \text{ und } Af := f' \text{ für } f \in D_1;$$

$$A : D_2 \rightarrow C([0, 1]), D_2 := C^\infty([0, 1]) \text{ und } Af := f' \text{ für } f \in D_2;$$

Untersuchen Sie die beiden Operatoren  $(A, D_1)$  und  $(A, D_2)$  auf Abgeschlossenheit.

(b) Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  beschränkt und von der Klasse  $C^2$ ,  $D(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  und  $\Delta : D(\Delta) \rightarrow L^2(\Omega)$  der Dirichlet-Laplace-Operator. Zeigen Sie, dass  $\Delta$  abgeschlossen ist, aber NICHT zu einem stetigen Operator auf  $L^2(\Omega)$  fortgesetzt werden kann.

## Aufgabe H2

Zeigen Sie: ein Banachraum  $X$  ist entweder von endlichen Dimension, oder jede Basis ist überabzählbar.