Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2006/07
19.01.2007

11. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Diskussion, mündlich)

Verdeutlichen Sie sich die Beweisidee des Satzes 13.1. Wieso liefert der Beweis keine Aussage in der Nähe des Randes?

Aufgabe G2

Sei $W_1 \subset \Omega$ mit $\overline{W_1} \subset \Omega$, $u \in H^1(\Omega)$, $\xi \in C_c^\infty(W_1)$ mit $\xi \geq 0$, $v = -D_k^{-h}(\xi^2 D_k^h u)$ (vgl. Vorlesung) und

$$A := \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega a_{ij} \partial_i v \partial_j u.$$

Zeigen Sie, dass

$$A \geq \frac{\alpha}{2} \|\xi D_k^h \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - C \|\nabla u\|_{L^2(W_1)}^2,$$

mit einer von u unabhängigen Konstante $C > 0$ und der Elliptizitätskonstante α.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst

(a) $\langle v, D_k^{-h} w \rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle D_k^h v, w \rangle_{L^2(\Omega)}$, $v, w \in L^2(\Omega)$, $|h| < \text{dist}\,(\text{supp}\, v, \partial\Omega)$.

(b) $D_k^h(vw) = v_k^h D_k^h w + w D_k^h v$, $v, w \in L^2(\Omega)$ mit $v_k^h(x) = v(x + he_k)$.

Aufgabe G3 (Neumann–Randbedingung)

Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt mit C^1-Rand.
Seien $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i, j \leq d$ und $a_0 \in C(\overline{\Omega})$, $a_0(x) \geq 0$ für jede $x \in \Omega$. Wir setzen die Elliptizitätsbedingung voraus:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > \alpha |\xi|^2, \qquad \forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

für ein $\alpha > 0$. Das Ziel ist das das folgende Problem, das so genannte Neumann–Problem, zu lösen

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_j\Big(a_{ij}\partial_i u\Big) + a_0 u &= f \quad \text{in } \Omega \\ -\sum_{j=1}^{d} \nu_j\Big(\sum_{i=1}^{d} a_{ij}\partial_i u\Big) &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{NP}$$

(a) Erfüllt die Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ (NP), so heißt u *klassische Lösung* von (NP). Eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ heißt *schwache Lösung* von (NP), falls

$$a(\varphi, u) = \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}\partial_j\varphi\partial_i u + \int_\Omega a_0\varphi u = -\int_{\partial\Omega} \varphi g \, \mathrm{d}\sigma + \int_\Omega \varphi f, \quad v \in H^1(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass jede klassische Lösung auch eine schwache Lösung ist, und umgekehrt ist eine schwache Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ immer auch eine klassische Lösung.

(b) Wir betrachten nun die homogene Randbedingung, d.h. $g = 0$. Beweisen Sie, dass eine eindeutige, schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ zu (NP) existiert, falls $a_0(x) \geq \alpha_0 > 0$. Ferner gibt es eine von f unabhängige Konstante C, so dass die Lösung u die Abschätzung $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$ erfüllt.

Hinweis Eine schwache Lösung existiert auch, falls $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ und $a_0 \in L^\infty(\Omega)$.

(c) Sei jetzt $a_0 = 0$, $g = 0$ und $\int_\Omega f = 0$ (und Ω zusammenhängend). Setze $M := \big\{u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u = 0\big\}$. Zeigen Sie, dass die Lösungen des elliptischen Minimumproblems auch Lösungen von (NP) sind. Diese Lösungen sind bis auf Addition einer Konstante eindeutig bestimmt.

(d) Angenommen, dass es überhaupt ein $u_0 \in BC^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ gibt, die die Randbedingung in (NP) erfüllt, zeigen Sie, dass (NP) eine eindeutige schwache Lösung besitzt, falls die in (b) an die Koeffizienten gestellte Bedingungen erfüllt sind.

Hinweis: Die folgende Aussagen sind bekannt und können ohne Beweis verwendet werden.

(a) **(Äußere Normale)** Es existiert eine stetige Funktion $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^d$, so dass für jedes $x \in \partial\Omega$ der Vektor $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_d(x))$ der äußere Normalenvektor von $\partial\Omega$ in Punkt x ist. Ferner gilt $|\nu(x)| = 1$.

(b) **(Randintegral)** Für ein $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ ist das Randintegral von f definiert durch

$$\int_{\partial\Omega} f \, \mathrm{d}\sigma,$$

wobei σ das Oberfläche-Maß bezeichnet.

(c) **(Gauß–Ostrogradsky-Theorem)** Sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann gilt

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\nu_i \,\mathrm{d}\sigma \qquad \text{für } i = 1, \dots, d.$$

(d) **(Poincaré-Ungleichung)** Es gilt:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad u \in M.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Neumann–Randbedingung)

Bearbeiten Sie Aufgabe G3.

Aufgabe H2 (Dirichletsches Prinzip)

Sei H ein Hilbertraum, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine stetige, symmetrische, koerzive Sesquilinearform und $\varphi \in H'$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt genau ein $u \in H$ mit $a(v, u) = \varphi(v)$ für alle $v \in H$.

(b) Das Funktional

$$F(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - \Re\varphi(v), \quad v \in H,$$

besitzt genau ein absolutes Minimum, das in u (vgl. (a)) angenommen wird.

Hiweis: Zeigen Sie, dass es ein $\alpha > 0$ gibt, so dass für alle $v \in H$ gilt:

$$F(v) - F(u) = \frac{1}{2} a(v - u, v - u) \geq \frac{\alpha}{2} \|v - u\|^2.$$