Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
12.01.2007

10. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Zeigen Sie, dass ein $B \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega))$, $Bf = g$ mit $\langle \varphi, f\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \varphi, g\rangle_{H_0^1(\Omega)}$ existiert.

(b) Zeigen Sie, dass

$$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}, \quad a(u,v) = \int\limits_\Omega \nabla u \overline{\nabla v}$$

eine stetige, koerzive Sesquilinearform ist.

(c) Sei $f \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, && \text{in } \Omega \\ u &= 0, && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt, d.h.

$$\langle \nabla\varphi, \nabla u\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \varphi, f\rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Zeigen Sie außerdem, dass die Lösung der Abschätzung

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{2}$$

mit einer von f unabhängigen Konstante $C > 0$ genügt. Wovon hängt diese Konstante ab?

(d) Zeigen Sie, dass auf $H_0^1(\Omega)$ durch $\langle f, g\rangle_{\tilde{H}} = \int\limits_\Omega \nabla f \overline{\nabla g}$ ein äquivalentes Skalarprodukt definiert wird. Wie wirkt sich dies auf die Abschätzung (2) aus?

(e) Ist die schwache Lösung von (1) eindeutig?

Aufgabe G2

Sei H ein Hilbertraum, $N, M \subset H$ und U ein Unterraum von H.

(a) Sei $x, y \in H$ mit $x \perp y \Longrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$ (Pythagoras).

(b) $M^\perp$ ist ein abgeschlossener Unterraum von H.

(c) $N \subseteq M \Longrightarrow M^\perp \subseteq N^\perp$

(d) $M \subseteq M^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{lin}}(M)$

(e) Geben Sie Beispiele von Räumen H und U an, so dass $U \neq U^{\perp\perp}$.

Hausübung

Aufgabe H1

(Hardyraum) Sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Dann heißt

$$H^2(D) := \left\{ f : D \to \mathbb{C} \text{ holomorph mit } \sup_{0 \le r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, \mathrm{d}t \right\}$$

Hardyraum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit Potenzreihendarstellung $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(f) z^n$, so gilt

$$f \in H^2(D) \quad \Longleftrightarrow \quad (a_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2.$$

(b) Für $f, g \in H^2(D)$ existiert

$$(f, g) := \lim_{r \to 1-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \overline{g(re^{it})} \, \mathrm{d}t,$$

und es gilt $(f, g) = \langle (a_n(f)), (a_n(g)) \rangle$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt in ℓ^2 ist.

(c) Die Funktionen e_k, definiert durch $e_k(z) := z^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, formen eine Orthonormalbasis von $H^2(D)$.

Aufgabe H2

In einem Hilbertraum gilt die Äquivalenz

$$x_n \to x \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_n \xrightarrow{\sigma} x \text{ (schwache Konvergenz)} \\ \|x_n\| \to \|x\| \end{cases}$$