Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2006/07
22.12.2006

9. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes C^1-Gebiet. Sei $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $1 \leq p < d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$

(b) $p = d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ für alle $r \in [p, \infty)$

(c) $p > d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

jeweils mit stetiger Einbettung.

Sei $p > d$ und $\theta = 1 - \frac{d}{p}$. Dann existiert $C := C_{\Omega,p,d}$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}|x-y|^\theta \qquad \forall f \in W^{1,p}(\Omega).$$

Aufgabe G2

Sei $f \in L^p(\Omega)$ mit $1 < p \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind

(a) $f \in W^{1,p}(\Omega)$.

(b) Es existiert $C > 0$

$$\left|\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| \leq C \cdot \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ i = 1, \ldots, d.$$

Hausübung

Aufgabe H1

Sei $f \in L^p(\Omega)$ mit $1 < p \leq \infty$. Zeigen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind

(a) $f \in W^{1,p}(\Omega)$.

(b) Es existiert $C > 0$ so, dass für jede $\Omega' \subset \Omega$ mit $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ und für alle $h \in \mathbb{R}^d$ mit $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \Omega^c)$

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega')} \leq C|h|.$$

Aufgabe H2

Skizzieren Sie den Beweis von Satz 10.9.

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr