Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
15.12.2006

8. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$ und $p > 1$.

(a) Zeigen Sie, dass die Einbettungen

$$W^{m,p}(I) \hookrightarrow W^{1,p}(I) \hookrightarrow W^{1,1}(I) \hookrightarrow C(\overline{I}).$$

stetig sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Einbettung

$$W^{m,p}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$$

kompakt ist.

Aufgabe G2

Es sei $d \geq 2$ und $\Omega := B(0, 1/e) := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1/e\}$. Zeigen Sie, dass es eine Funktion aus $W^{1,2}(\Omega)$ gibt, die auf Ω nicht-stetig ist. Betrachte dazu Funktionen der Form

$$f(x) := \big(\log(1/|x|)\big)^s, \quad s \in (0, \infty).$$

Was bedeutet das für Aussagen über $W^{1,2}$-Funktionen am Rand ihres Definitionsbereiches?

Aufgabe G3

Sei $d \geq 2$ und $f_1, \ldots, f_d \in L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})$. Für $x \in \mathbb{R}^d$ und $1 \leq i \leq d$ setze für $x \in \mathbb{R}^d$

$$\widetilde{x}_i := (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \text{und } f(x) = f_1(\widetilde{x}_1) f_2(\widetilde{x}_2) \cdots f_n(\widetilde{x}_d).$$

Zeigen Sie, dass $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{i=1}^{d} \|f_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}$$

gilt.

Hausübung

Aufgabe H1

Seien $\Omega', \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, und $\Phi : \Omega' \to \Omega$ ein C^1-Diffeomorphismus mit beschränkten Ableitungen $D\Phi$, $D\Phi^{-1}$. Beweisen Sie die folgende Aussage. Falls $f \in W^{1,p}(\Omega)$, dann liegt $f \circ \Phi$ in $W^{1,p}(\Omega')$ und

$$D_i(f \circ \Phi) = \sum_{j=1} D_j f \circ \Phi \cdot D_i \Phi_j,$$

wobei $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_d(x))$ mit Koordinatenfunktionen $\Phi_j : \Omega' \to \mathbb{R}$.

Aufgabe H2

Sei $m \in \mathbb{N}$ ($m \geq 1$) und $1 \leq p < \infty$. Die folgende Aussagen sind zu beweisen:

(a) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} = 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d)$ für alle $r \in [d, \infty)$

(b) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$

jeweils mit stetiger Einbettung.

(a) Sei $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0$, $m - d/p \notin \mathbb{N}$. Setze

$$k := \left[m - \tfrac{d}{p}\right] \qquad \text{und} \quad \theta := m - \tfrac{d}{p} - k,\ 0 < \theta < 1.$$

Dann existiert eine Konstante C, so dass für jede $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\begin{aligned} \|D^\alpha f\|_{L^\infty} &\leq C\|f\|_{W^{m,p}} && \text{für alle } |\alpha| \leq k \\ |D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| &\leq C\|f\|_{W^{m,p}}|x-y|^\theta && \text{für fast alle } x, y \in \mathbb{R}^d,\ |\alpha| = k. \end{aligned}$$

Aufgabe H3

Es sei $d \geq 2$, sowie $\mathbb{R}^d_+ := \{x \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\}$ der Halbraum und für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ schreiben wir $x = (x', x_d)$ mit $x' = (x_1, \dots, x_{d-1})$. Wir wollen $W^{1,2}(\mathbb{R}^d_+)$ Funktionen am Rand von $\mathbb{R}^d_+$ auswerten. Beweisen Sie dazu die folgende Aussagen:

(a) Für alle $u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^d_+})$ gilt

$$u(x', 0) = -\int_0^\infty \frac{\partial u(x', x_d)}{\partial x_d}\, \mathrm{d}x_d.$$

(b) Für alle $u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^d_+})$ gilt $\|u(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} \leq \|u\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^d_+)}$.

(c) **(Spursatz)** Es gibt eine eindeutige stetige lineare Abbildung $\Gamma : W^{1,2}(\mathbb{R}^d_+) \to L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ mit $\Gamma u = u|_{\mathbb{R}^{d-1}}$ für $u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^d_+})$. (Verwende dazu ohne Beweis, dass $C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^d_+})$ dicht in $W^{1,2}(\mathbb{R}^d_+)$ ist.)