Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
08.12.2006

7. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Falls $f \in C^m(\Omega)$, so stimmen die "klassischen Ableitungen" und die distributionellen Ableitungen für $|\alpha| \leq m$ überein.

(b) Seien $g_1, g_2 \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ distributionelle Ableitungen von $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Dann gilt $g_1 = g_2$ fast überall.

Aufgabe G2

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Für $k \in \mathbb{N}$ wird induktiv

$$M_k := \left\{x \in 2^{-k}\mathbb{Z}^d\right\} : \overline{B(x, 2^{1-k})} \subseteq \Omega,\ x \notin B(y, 2^{1-l}) \text{ für alle } y \in M_l \text{ mit } l < k\right\}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $(B(x, 2^{1-k}))_{x \in M_k, k \in \mathbb{N}}$ eine lokal finite Überdeckung von Ω ist.

Aufgabe G3

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Banachräume und $1 \leq p \leq \infty$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Falls X_i, $i = 1, \ldots, n$ alle separabel sind, dann ist $X_1 \underset{p}{\oplus} X_2 \underset{p}{\oplus} \cdots \underset{p}{\oplus} X_n$ auch separabel.

(b) Falls X_i, $i = 1, \ldots, n$ alle reflexiv sind, dann ist $X_1 \underset{p}{\oplus} X_2 \underset{p}{\oplus} \cdots \underset{p}{\oplus} X_n$ auch reflexiv.

Hausübung

Aufgabe H1

Sei $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$. Zeigen Sie, dass $C_c^\infty(I)$ nicht dicht in $W^{m,\infty}(I)$ ist. Ferner sind $W^{1,\infty}(I)$ und $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ nicht separabel.

Aufgabe H2

Zeigen Sie:

(a) $[-1, 1] \ni x \mapsto |x|$ liegt in $W^{1,1}((-1, 1))$.

(b) Sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ mit schwacher Ableitung g, $g(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$, dann ist $f \equiv c$ fast überall für eine Konstante c.