Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
01.12.2006

# 6. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

## Gruppenübung

### Aufgabe G1

Sei $X$ ein normierter Vektorraum, $L \subseteq X$ abgeschlossen, $K \subseteq X$ kompakt.

(a) Zeigen Sie, dass $L + K := \{x + y : x \in L, y \in K\}$ abgeschlossen ist.

(b) Zeigen Sie, dass $L + k$ kompakt ist, falls zusätzlich $L$ kompakt ist.

(c) Geben Sie zwei abgeschlossene Mengen an, deren Summe nicht abgeschlossen ist.

### Aufgabe G2

Zeigen Sie

(a) Der Raum $L^1 \cap L^\infty(M, \mu) := L^1(M, \mu) \cap L^\infty(M, \mu)$, versehen mit der Norm $\|f\|_{1\cap\infty} := \|f\|_1 + \|f\|_\infty$, ist ein Banachraum.

(b) Definiere $L^1 + L^\infty(M, \mu) := \{f : f : M \to \mathbb{K}$ messbar und $\exists g \in L^1(M, \mu), h \in L^\infty(M, \mu)$ mit $f = g + h\}$. Die Abbildung

$$\|f\|_{1+\infty} := \inf\{\|h\|_1 + \|g\|_\infty : h \in L^1, f \in L^\infty\}.$$

ist eine Norm, mit der $L^1 + L^\infty$ ein Banachraum ist.

(c) Es gilt $L^p(M, \mu) \hookrightarrow L^1 + L^\infty(M, \mu)$, wobei die Einbettung stetig ist.

### Aufgabe G3

Sei $f \in BUC(\mathbb{R}^d)$ und $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Mollifier. Zeigen Sie, dass $\rho_n * f \to f$ in $BUC(\mathbb{R}^d)$ (d.h. gleichmäßig).

# Hausübung

**Aufgabe H1**

Für $h \in \mathbb{R}^d$ betrachte man den Operator $T_h$, definiert durch

$$(T_h f)(x) = f(x+h), \qquad f \in L^p(\mathbb{R}^d),\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Beweisen Sie die Stetigkeit von $T_h : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ und der Funktion $\mathbb{R}^d \ni h \mapsto T_h f$ für $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

**Aufgabe H2**

Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Zeigen sie, dass $L^1(\mathbb{R}^d)$, versehen mit den Operationen $f+g$, $f * g$, eine kommutative Banachalgebra ist, welche keine Einselement besitzt.