Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
24.11.2006

5. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $1 \le p_i \le \infty$, $f_i \in L^{p_i}$ für $i = 1, \dots, n$. Sei ferner $1 \le p \le \infty$ so, dass $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$. Dann gilt

$$\prod_{i=1}^n f_i \in L^p \quad \text{und} \quad \Big\| \prod_{i=1}^n f_i \Big\|_{L^p} \le \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{p_i}}.$$

Aufgabe G2

Es sei $X := C([0,2])$ und $\varphi \in X'$ definiert durch

$$\varphi(f) := \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Man zeige, dass kein $f \in C([0,2])$ existiert mit $\|f\| \le 1$ und $|\varphi(f)| = \|\varphi\|$.

(b) Geben Sie Beispiele von unstetigen linearen Funktionalen auf normierten Räumen an.

Aufgabe G3

Sei X ein normierter Raum. Zeigen Sie:

(a) X' trennt die Punkte von X.

(b) Normkonvergenz impliziert schwache Konvergenz.

(c) Die Umkehrung von (b) gilt nicht.

(d) $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ in X, dann $\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

Hausübung

Aufgabe H1

Betrachte $L^p((0,1)^d)$ und $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Für welche $1 \le p \le \infty$ liegt f in L^p?

Aufgabe H2

Sei (M, Σ, μ) ein endlicher Maßraum.

(a) Sei $1 \le r \le p \le \infty$. Beweisen Sie, dass $L^p(M,\mu) \subseteq L^r(M,\mu)$. Bestimmen Sie die Einbettungskonstante.

(b) Sei $\mu(M) = 1$ und $f \in \bigcap_{p \ge 1} L^p(M,\mu)$ mit $\sup_{p\ge 1} \|f\|_{L^p(M,\mu)} \le M$. Dann gilt

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

Hinweis: Für $C > 0$ gilt: $\mu\{f > C\}^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{C}\|f\|_{L^p}$.

Aufgabe H3

Betrachte die Menge A von stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{K}$, welche

$$\int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

erfüllen. Ist A dicht in $C([0,1])$? Begründung!