Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2006/07
17.11.2006

4. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Bestimmen Sie die Dualräume von ℓ^p für $p \geq 1$.

(b) Zeigen Sie, dass stetige lineare Funktionale $\varphi \in (\ell_\infty)'$ existieren, die $\varphi((a_n)) = \lim_{n\to\infty} a_n$ erfüllen für alle $(a_n) \in c$.

(c) Für $y = (y_n) \in \ell^1$ sei $\varphi_y : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(x_n) \mapsto \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$. Zeigen Sie, dass $\varphi_y \in (\ell^\infty)'$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass $y \mapsto \varphi_y$ eine normerhaltende lineare Abbildung ist, aber nicht surjektiv auf $(\ell^\infty)'$ ist.

(e) Zeigen Sie, dass c_0 und ℓ^1 nicht reflexiv sind.

Aufgabe G2

Sei $\alpha \in (0,1)$. Die Funktion $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$k(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{|x-y|^\alpha} & x \neq y \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $f \in C([0,1])$ sei T definiert durch

$$(Tf)(x) := \int_0^1 k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

(a) Zeigen Sie, dass T ein stetiger Operator auf $C([0,1])$ ist.

(b) Ist T kompakt?

(c) Sei $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{K}$ stetig. Für $f \in C(I)$ definiere

$$(Sf)(x) := \int_0^x k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in [0,1].$$

Zeigen Sie, dass T kompakt ist.

Aufgabe G3

Zeigen Sie, dass ein lineares Funktional $\varphi : X \to \mathbb{K}$ stetig ist genau dann, wenn $\ker \varphi$ abgeschlossen ist. Ist $\ker \varphi$ nicht abgeschlossen, dann ist er sogar dicht in X.

Hausübung

Aufgabe H1

Zeigen Sie, dass der Identitätsoperator $I : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ kompakt ist.

Aufgabe H2

(a) Sei $m \in \ell^\infty$ und $M : \ell^p \to \ell^p$ ($1 \leq p < \infty$) sei definiert durch $(Mx) = m_n x_n$. Dann ist M kompakt genau dann, wenn $m \in c_0$.

(b) Widerlegen Sie anhand eines Gegenbeispiels die folgende Behauptung: Ist (T_n) eine Folge kompakter Operatoren auf einem Banachraum X und existiert $Tx := \lim T_n x$ für alle $x \in X$, dann ist T kompakt.