Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
10.11.2006

3. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Seien X, Y normierte Vektorräume und Y vollständig, $D \subseteq X$ ein dichter Unterraum und $T : D \to Y$ ein beschränkter linearer Operator. Zeigen Sie: T hat eine eindeutige stetige Fortsetzung auf X.

(b) Sei $c_{00} := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_n \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } n\}$. Zeigen Sie: c_{00} ist dicht in ℓ^p, $1 \le p < +\infty$, und in c_0.

(c) Sei $(m_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und definiere den linearen Operator $M : c_{00} \to c_{00}$ durch $M(x_n) = (m_n x_n)$. Zeigen Sie, dass so tatsächlich ein linearer Operator definiert wird. Welche Bedingungen muss man an (m_n) stellen, damit M bezüglich der ℓ^p-Norm $(1 \le p < \infty)$ beschränkt wird. Geben Sie die Fortsetzung von M auf ℓ^p an.

Aufgabe G2

(a) Sei $(a_{ij}) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ eine unendliche Matrix. Setze

$$(Tx)_i := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j, \qquad i \in \mathbb{N},\ x \in c_{00}.$$

Zeigen Sie, dass T genau dann ein beschränkter Operator bezüglich der ℓ^1-Norm auf c_{00} ist, wenn

$$\sup_{j\ge 1} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| < +\infty.$$

(b) Geben Sie die Fortsetzung von T auf ℓ^1 an.

Aufgabe G3

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ heißt *unterhalbstetig*, falls für jede konvergente Folge $(x_n) \subseteq X$ mit $\lim_{x\to\infty} x_n = x$, gilt

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x).$$

(a) Zeigen Sie, dass eine unterhalbstetige Funktion auf jeder kompakten Menge eine Minimalstelle hat.

(b) Sei $\mathcal{F}$ eine Menge von stetigen Funktionen auf X. Zeigen Sie, dass

$$g(x) := \sup_{f\in\mathcal{F}} f(x)$$

eine unterhalbstetige Funktion ist.

Hausübung

Aufgabe H1

Es sei $X := \ell^p$, $1 \leq p \leq \infty$. Die Operatoren R, L seien definiert durch

$$\begin{aligned} R : (x_1, x_2, \dots) &\quad\mapsto\quad (0, x_1, x_2, \dots) \\ L : (x_1, x_2, \dots) &\quad\mapsto\quad (x_2, x_3, \dots). \end{aligned}$$

Betrachte auch den Operator M aus Aufgabe G1(c), und setze $T := ML$.

(a) Zeigen Sie, dass R, L, M, T beschränkt sind und bestimmen Sie die jeweiligen Operatornormen.

(b) Es gelte außerdem $|m_1| \geq |m_2| \geq \cdots$. Für $n \in \mathbb{N}$ bestimme man die Operatornormen von R^n, L^n, M^n, T^n.

Aufgabe H2

Sei X ein normierter Raum und $S, T : X \to X$ lineare Abbildungen mit der Eigenschaft $ST - TS = Id$. Zeigen Sie, dass S oder T unstetig ist.