Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
03.11.2006

2. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

Zwei normierte Vektorräume $(X, \|\cdot\|)$ und $(Y, |||\cdot|||)$ heißen isometrisch isomorph ($X \simeq Y$), falls ein linearer (algebraischer) Isomorphismus J zwischen X und Y existiert, welcher auch eine Isometrie ist, d.h. $|||Jx||| = \|x\|$. Zeigen Sie: X ist vollständig, genau dann, wenn Y vollständig ist.

Aufgabe G2

Zeigen Sie: Auf einem endlichdimensionalen Raum sind je zwei Normen äquivalent.

Aufgabe G3

Für $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ setze

$$V((a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|.$$

Sei $bv := \{(a_n) : V((a_n)) < +\infty\}$. Zeigen Sie, dass $bv \subseteq c$ und $(bv, \| \cdot \|_{bv})$ ein Banachraum ist, wobei $\|(a_n)\|_{bv} := \lim_{k\to\infty} |a_k| + V((a_n))$.

Hausübung

Aufgabe H1

Seien $(X, \|\cdot\|)$ und $(Y, |||\cdot|||)$ normierte Vektorräume und $1 \leq p \leq \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\|(x,y)\|_p := \begin{cases} \Big(\|x\|^p + |||y|||^p\Big)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \max\{\|x\|, |||y|||\} & p = \infty. \end{cases}$$

eine Norm auf $X \times Y$ definiert. Das Paar $(X \times Y, \|(\cdot,\cdot)\|_p)$ wird mit $X \underset{p}{\oplus} Y$ bezeichnet.

(b) Die Normen $\|(\cdot,\cdot)\|_p$ sind äquivalent auf $X \times Y$.

(c) Sind X und Y vollständig, so ist $X \oplus_p Y$ vollständig.

Aufgabe H2

Zeigen Sie: eine Menge $\mathcal{A} \subseteq c_0$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist und die folgende Eigenschaft besitzt: für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $(a_n) \in \mathcal{A}$ $|a_n| \leq \varepsilon$ gilt.