Fachbereich Mathematik
Dr. M. Geißert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07
27.10.2006

1. Übungsblatt zur PDG I:Funktionalanalytische Methoden

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Für $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ sei

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{d} |x_i|, \quad \|x\|_2 := \Big(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2\Big)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty := \max_{1\le i\le d} |x_i|.$$

i. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$, $p = 1, 2, \infty$ Banachräume sind.
ii. Skizzieren Sie für $d = 2$ die “Einheitskugeln” $B_p := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_p \le 1\}$.

(b) Zeigen Sie, dass l^∞ ein Banachraum ist.

(c) Sei $1 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass l_p vollständig ist.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $l_p \subset l_\infty$ und $\|\cdot\|_\infty \le \|\cdot\|_p$.

Aufgabe G2

Es sei $X := C([a, b])$ für $a < b$ und $\omega : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, nichtnegative Funktion. Wir setzen

$$p_\omega(f) := \sup\{\omega(s)|f(s)| : s \in [a, b]\}.$$

(a) Welche Bedingungen muss man an ω (genauer an $\omega^{-1}(\{0\})$) stellen, damit p_ω eine Norm ist?

(b) Es existiere $\varepsilon > 0$ so, dass $\omega(s) \ge \varepsilon$ für alle $s \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass (X, p_ω) ein Banachraum ist.

Aufgabe G3

Sei $\mathrm{Lip}([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} :\ f \text{ Lipschitz-stetig}\}$. Für $f \in \mathrm{Lip}([0,1])$ sei

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := |f(0)| + \sup_{x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathrm{Lip}([0,1]), \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}})$ ein Banachraum ist.

Hausübung

Aufgabe H1

Sei $f \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$ mit $f \geq 0$, $\|f\|_\infty = 1$ und $f(x) = 0$ für $x > \frac{1}{2}$. Zeigen Sie, dass

(a) $\exists K > 0$: $\max_{0 \leq x \leq 1} |u_n(x)| \leq K$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\max_{0 \leq x \leq 1} |u_n'(x)| \overset{n \to \infty}{\to} \infty$,

wobei $u_n(x) = c_n f(nx)/n$ mit $c_n > 0$ so, dass $\int_0^1 |u_n'(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 1$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $c_n > 0$ mit $\int_0^1 |u_n'(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 1$ existiert.

Aufgabe H2

Für $a < b$ sei $X := C^1([a,b]) := \{f \in C([a,b]) :\ f \text{ stetig differenzierbar in } [a,b]\}$. Für $f \in X$ sei

$$\begin{aligned} p_1(f) &:= \sup\{|f(s)| : s \in [a,b]\}, \\ p_2(f) &:= \sup\{|f'(s)| : s \in [a,b]\}, \\ p_3(f) &:= |f(a)| + \sup\{|f'(s)| : s \in [a,b]\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie

(a) p_1 ist eine Norm auf X; p_2 ist keine Norm auf X.

(b) (X, p_1) ist kein Banachraum.

(c) (X, p_3) ist ein Banachraum.