Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Kiehl
Dr. M. Geißert
S. Ullmann

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2008/09
13.02.2009

14. Übungsblatt zur Mathematik III für MB, WI/MB, MPE, AngMech

Gruppenübung

Aufgabe G1

Es sei

$$\Gamma_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], t = 0\}, \quad \Gamma_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], t = 1\},$$
$$\Gamma_3 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1], x = 1\}, \quad \Gamma_4 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1], x = 0\}$$

Die Differentialgleichung

$$u_t = \frac{1}{2} u_{xx}, \ x \in [0,1], \ t \in [0,1],$$

besitzt für alle $g \in C^2(\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4)$

genau eine Lösung u mit $u = g$ auf $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$.	richtig	☐	falsch	☐
höchstens eine Lösung u mit $u = g$ auf $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$.	richtig	☐	falsch	☐
unendliche viele Lösungen mit $u = g$ auf Γ_1.	richtig	☐	falsch	☐
höchstens eine Lösung u mit $u = g$ auf $\Gamma_1 \cup \Gamma_4$.	richtig	☐	falsch	☐
genau eine Lösung u mit $u = g$ auf $\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$.	richtig	☐	falsch	☐

Aufgabe G2

Die folgenden Differentialgleichungen sind

	elliptisch	hyperbolisch	parabolisch
$0 = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	[ ]	[ ]	[ ]
$0 = 1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	[ ]	[ ]	[ ]
$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	[ ]	[ ]	[ ]
$0 = y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	[ ]	[ ]	[ ]

Aufgabe G3

(a) Die Differentialgleichung

$$2xy' + x^2 y + 6x^3 e^x = 0$$

ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung.	richtig	☐	falsch	☐
ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung.	richtig	☐	falsch	☐
ist eine lineare Differentialgleichung.	richtig	☐	falsch	☐
ist eine homogene lineare Differentialgleichung.	richtig	☐	falsch	☐
ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung.	richtig	☐	falsch	☐
besitzt unendlich viele Lösungen.	richtig	☐	falsch	☐
besitzt eine eindeutige Lösung.	richtig	☐	falsch	☐

(b) Sind folgenden Funktionensysteme linear unabhängig über $\mathbb{R}$?

$y_1(x) = x,\ y_2(x) = x^2,\ y_3(x) = x^3$	richtig	☐	falsch	☐
$y_1(x) = \sin x,\ y_2(x) = \cos x,\ y_3(x) = \sin x + \cos x$	richtig	☐	falsch	☐

Aufgabe G4

(a) Sind die folgenden Differenzialgleichungen exakt?

$\left(\frac{y^2}{2t} - \cos t\right) dt + \left(y \ln t + \frac{y^3}{2}\right) dy = 0$	☐	richtig	☐	falsch
$y^2 dt - 2yt dy = 0$	☐	richtig	☐	falsch
$t^2 \sin y dt + \frac{t^3 \cos y - y^2}{3} dy = 0$	☐	richtig	☐	falsch

(b) Wozu benötigt man einen integrierenden Faktor?

(i) ☐ um die homogene Lösung zu finden.
(ii) ☐ um eine nicht exakte DGL exakt zu machen.
(iii) ☐ um die Lipschitzkonstante zu berechnen.
(iv) ☐ um die Variablen trennen zu können.

Aufgabe G5

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= u_{xx}(t,x) + \sin(\pi x), \quad u(x,0) = \sin(2\pi x), \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \quad t > 0, \quad x \in (0,1). \end{aligned}$$

Aufgabe G6

Lösen Sie das folgende Problem mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Aufgabe G7

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}.$$

b) Bestimmen sie diejenige Lösung, die die Anfangsbedingung

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

Aufgabe G8

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = x\,(1 + y^2), \quad y(0) = 0$$

durch Trennen der Veränderlichen.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \cos(x + y)$$

durch die Substitution $z(x) = x + y(x)$ und anschließender Trennung der Veränderlichen.