

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Kiehl
Dr. M. Geißert
S. Ullmann



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2008/09
23.01.2009

11. Übungsblatt zur Mathematik III für MB, WI/MB, MPE, AngMech

Gruppenübung

Aufgabe G1

Gegeben sei das Randwertproblem:

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x + 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 2. \quad (1)$$

- Ermitteln Sie eine partikuläre Lösung von (1).
- Transformieren Sie (1) anhand des Ergebnisses aus (a) in ein halbhomogenes Randwertproblem mit homogener Differentialgleichung.
- Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die homogene Lösung von (1).
- Geben Sie die Lösung von (1) an.

Aufgabe G2

Gegeben sei das vollhomogene Randwertproblem

$$y''(x) + 2y'(x) - \lambda y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) + y'(\pi) = 0, \quad (2)$$

wobei λ ein Parameter ist.

Man nennt Probleme dieser Art *Eigenwertprobleme*. Eigenwertprobleme besitzen immer die triviale Lösung $y \equiv 0$. Es hängt von λ ab, ob es noch weitere Lösungen gibt. Diejenigen λ , für die das Randwertproblem nicht triviale Lösungen besitzt, heißen *Eigenwerte* des Randwertproblems. Die zugehörigen Lösungen heißen *Eigenfunktionen* zum Eigenwert λ .

Um die Eigenwerte und Eigenfunktionen von (2) zu bestimmen, führen Sie folgende Schritte durch:

- (a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von λ Lösungsfundamentalsysteme für (2).
(*Hinweis*: Beschränken Sie sich dabei auf Eigenwerte $\lambda < -1$.)
- (b) Stellen Sie die Matrix R und den Vektor γ auf und ermitteln Sie anhand der Bedingung $\det R = 0$ diejenigen λ , für die das Randwertproblem Lösungen besitzt.

Aufgabe G3

Gegeben sei das Randwertproblem:

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = e^{-x}, \quad y(0) = \alpha, \quad y'\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \beta. \quad (3)$$

- (a) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist (3) lösbar?
- (b) Bestimmen Sie zu $\beta = 0$ die Zahl α , so dass (3) lösbar ist und geben Sie die Lösung(en) an.

Hausübung

Aufgabe H1

Lösen Sie das Randwertproblem

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x^2 - 5, \\ y(0) - y'(0) = 1, \quad -y(0) + 2y''(0) = 2, \quad 2y(1) - 3y'(1) - y''(1) = 0.$$

Aufgabe H2

Für welche λ ist das Eigenwertproblem

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0$$

lösbar?

Geben Sie in Abhängigkeit von λ alle Eigenfunktionen an.

Hinweis: Unterscheiden Sie die drei Fälle $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$.

Beachten Sie, dass die triviale Lösung $y \equiv 0$ keine Eigenfunktion ist.

Aufgabe H3

Es sei ein Balken der Länge l gegeben, der an beiden Enden getragen und mit einer konstanten Last belegt wird. Für kleine Durchbiegungen folgt für die Biegelinie $y(x)$ die Differenzialgleichung

$$y'' = -m.$$

Untersuchen Sie für die folgenden Fälle, ob keine, eine oder mehrere Lösungen des Randwertproblems existieren:

- (i) Die Enden des Balkens werden fest gestützt, also $y(0) = y(l) = 0$.
- (ii) Die Enden des Balkens werden fest eingespannt, aber in der Höhe verstellbar:
 $y'(0) = 0, y'(l) = -lm$.
- (iii) Wie in (ii), aber mit $y'(0) = y'(l) = 0$.
- (iv) Der Balken ist links gestützt ($y(0) = 0$) und rechts eingespannt ($y'(l) = 0$).

Geben Sie jeweils die Lösungen an.

Abgabe: **30.01.2009** in der jeweiligen Gruppenübung