Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Kiehl
Dr. M. Geißert
S. Ullmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008
05.12.2008

7. Übungsblatt zur Mathematik III für MB, WI/MB, MPE, AngMech

Gruppenübung

Aufgabe G1

Gegeben sei das System $y' = Ay$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie die Stabilität des Systems via
   i) Berechnung der Eigenwerte
   ii) des Routh-Hurwitz-Kriteriums.

b) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse aus i) und ii). Gibt es einen Widerspruch? Ist das System stabil oder nicht?

Aufgabe G2

Wir betrachten das Differenzialgleichungssystem

$$y' = A(t)y, \quad A(t) = \begin{pmatrix} -4\cos(2t)\sin(2t) - 1 & -4\sin^2(2t) \\ 4\cos^2(2t) & 4\cos(2t)\sin(2t) - 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte von $A(t)$. Ist $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stabil? Zeigen Sie, dass

$$y(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) - \sin(2t) \\ \cos(2t) + \sin(2t) \end{pmatrix} e^t$$

eine Lösung des Differenzialgleichungssystems ist. Was folgt daraus für die Stabilität von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$? Wieso ist das kein Widerspruch zu den Stabilitätssätzen?

Aufgabe G3

Zeigen Sie: $\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = 0$ (die Gleichung für den Strom in einem RLC-Kreis) ist für $R, L, C > 0$ immer stabil in $I = 0$.

Hausübung

Aufgabe H1

Gegeben seien die charakteristischen Polynome

$$\lambda^4 + 5\lambda^3 + 10\lambda^2 + 10\lambda + 4$$

und

$$\lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda - 4.$$

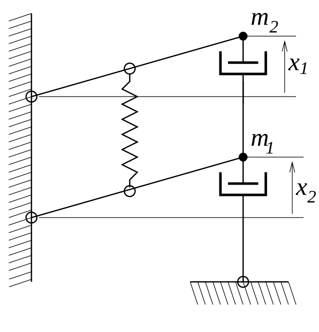
Überprüfen Sie für jedes der beiden Polynome, ob alle Nullstellen λ_i das Kriterium $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ erfüllen. *Hinweis:* Sie müssen die Nullstellen nicht explizit berechnen.

Aufgabe H2

Untersuchen Sie, ob die DGL $y' = A_i y$ stabil ist für

$$A_1 = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 10 & -19 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H3



Es werde das rechts abgebildete, einfache mechanische System betrachtet, in dem zwei auf gradliniger Bahn befindliche Massen m_1, m_2 (kleine Auslenkungen x_1, x_2) durch eine Feder verbunden und außerdem geschwindigkeitsproportionale Dämpfungen vorhanden sind. Mit den Bezeichnungen aus der Abbildung lauten die Bewegungsgleichungen, wobei d zur Federkonstante proportional ist:

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= d(x_2 - x_1) + k_2(x_2' - x_1') - k_1 x_1' \\ m_2 x_2'' &= d(x_1 - x_2) + k_2(x_1' - x_2'). \end{aligned}$$

Lösen Sie dieses System für $m_1 = m_2$, $k_1 = k_2$ und $\frac{d}{m_1} = 1 = \frac{k_1}{m_1}$.

Hinweis: Überführen Sie das System erst in ein System erster Ordnung mit vier Gleichungen.

Abgabe: **12.12.2008** in der jeweiligen Gruppenübung