Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Kiehl
Dr. M. Geißert
S. Ullmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2008
07.11.2008

3. Übungsblatt zur Mathematik III für MB, WI/MB, MPE, AngMech

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Sind die folgenden Differenzialgleichungen exakt?

$\left(\frac{y^2}{2t} - \cos t\right)\,\mathrm{dt} + \left(y \ln t + \frac{y^3}{2}\right)\,\mathrm{dy} = 0$	☐ ja	☐ nein
$y^2\,\mathrm{dt} - 2yt\,\mathrm{dy} = 0$	☐ ja	☐ nein
$t^2 \sin y\,\mathrm{dt} + \frac{t^3 \cos y - y^2}{3}\,\mathrm{dy} = 0$	☐ ja	☐ nein

(b) Wozu benötigt man einen integrierenden Faktor?

i. ☐ um die homogene Lösung zu finden.
ii. ☐ um eine nicht exakte DGL exakt zu machen.
iii. ☐ um die Lipschitzkonstante zu berechnen.
iv. ☐ um die Variablen trennen zu können.

Aufgabe G2

Für das Anfangswertproblem $y' = x \cdot y$, $y(0) = 1$ berechnen Sie 3 sukzessive Näherungslösungen (Picard-Iteration) mit $y_0 = y(0) = 1$. Vergleichen Sie zusätzlich die gefundene Approximation mit der exakten Lösung.

Aufgabe G3

Bestimmen Sie die Koeffizienten a_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ in der Reihenentwicklung

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

für die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = x^2 y + 1 \quad , \quad y(0) = 0.$$

Aufgabe G4

Für das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + y^2 x - y^3 \ , \qquad y(0) = 0 \ ,$$

zeige man mittels des Satzes von Picard–Lindelöf, dass genau eine Lösung auf dem Intervall $J = [-1/3, 1/3]$ existiert. Man nutze weiter das Iterationsverfahren mit der Startfunktion $u_0(x) = 0$ und bestimme u_2.

Hinweis: Sie können den Satz auf Folie 65 und die Bemerkung auf Folie 70 nutzen.

Hausübung

Aufgabe H1

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + (1 - x)y - 1, \quad y(0) = 1$$

für $-1 < x < 1$ mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

(a) Berechnen Sie die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_5$ der Potenzreihe.

(b) Leiten Sie aus (a) eine Vermutung bezüglich der Werte der Koeffizienten a_n für $n \in \mathbb{N}_0$ ab. Wie lautet die Lösung, wenn Ihre Vermutung richtig ist? Machen Sie die Probe.

Aufgabe H2

(a) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{x|y|}, \quad y(1) = 0$$

mit $x \geq 0$. Bestimmen Sie durch Anwendung des Satzes von Peano in Bezug auf das Rechteck $J \times D = [0,2] \times [-2,2]$ ein Intervall, auf dem eine Lösung des Anfangswertproblems existiert.
Hinweis: Es wird nicht verlangt, dass Sie eine Lösung des Anfangswertproblems berechnen. Beachten Sie bitte auch, dass nichts über die Eindeutigkeit der Lösung gesagt wird.

(b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = y \cdot e^{x^2-25} \cdot \sin(x^3+2), \quad y(2) = 1$$

genau eine Lösung auf dem Intervall $[-1,5]$ besitzt.
Hinweis: Es wird nicht verlangt, dass Sie eine Lösung des Anfangswertproblems berechnen.

Aufgabe H3

Ein kugelförmiger Tank mit Radius R sei zur Hälfte mit Wasser gefüllt. Auf der Unterseite des Tanks ist ein Loch mit Radius r, durch das das Wasser unter dem Einfluss der Schwerkraft nach und nach aus dem Tank fließt. Bestimmen Sie für jeden Zeitpunkt t die Wassertiefe (eine implizite Gleichung genügt), und berechnen Sie, nach welcher Zeit das Wasser vollständig aus dem Tank geflossen ist.

Hinweis: Wir gehen davon aus, dass r gegenüber R so klein ist, dass der Tank einer Kugel und nicht einer Kugel mit abgeschnittener Kappe entspricht.

Zur Berechnung wird das *Gesetz von Torricelli* benötigt, das die Geschwindigkeit einer durch eine Öffnung abfließende Flüssigkeit mit

$$v = \sqrt{2gh}$$

angibt, wobei g die Gravitationsbeschleunigung ist und h die Höhe des Flüssigkeitsspiegels über der Öffnung angibt.

Damit können Sie das Volumen $\mathrm{d}V$ an Wasser, das in einem kleinen Zeitintervall $\mathrm{d}t$ abfließt, auf zwei Arten berechnen. Wenn zum Zeitpunkt t der Wasserspiegel y gegeben ist, können Sie einerseits mit dem Gesetz von Torricelli bestimmen, wieviel Wasser durch das Loch mit Radius r abfließt. Andererseits können Sie mit dem Radius x des Flüssigkeitsspiegels zum Zeitpunkt t, wenn der Flüssigkeitsspiegel um $\mathrm{d}y$ abnimmt, das Volumen mit $\mathrm{d}V = \pi x^2 \,\mathrm{d}y$ abschätzen. Mit diesen beiden Ansätzen können Sie eine DGL modellieren.

Abgabe: **14.11.2008** in der jeweiligen Gruppenübung