3 Optional Sampling

Gegeben: Filtration $\widetilde{\mathfrak{A}}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Definition 1. $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt *Stoppzeit (bzgl. $\widetilde{\mathfrak{A}}$)*, falls

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 : \ \{\tau \leq n\} \in \mathfrak{A}_n.$$

Lemma 1.

$$\tau \text{ Stoppzeit} \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 : \ \{\tau = n\} \in \mathfrak{A}_n.$$

Proof. Verwende

$$\{\tau \leq n\} = \bigcup_{i=0}^{n} \{\tau = i\}, \qquad \{\tau = n\} = \{\tau \leq n\} \setminus \{\tau \leq n-1\}.$$

□

Example 1. Verkaufsstrategien für eine Aktie mit Preis X_n zur Zeit $n \in \mathbb{N}_0$:

(i) Verkaufe, sobald der Preis a erreicht oder überschritten ist, spätestens jedoch zur Zeit N.

(ii) Verkaufe beim ersten Eintreten des Maximum von $X_0, \ldots, X_N$.

Formal heißt (i)

$$\tau = \inf\left(\{i \in \{0, \ldots, N\} : X_i \geq a\} \cup \{N\}\right).$$

Dann: τ ist Stoppzeit bzgl. der kanonischen Filtration $\widetilde{\mathfrak{A}}$ zu $\widetilde{X}$, d.h. 'realisierbare Strategie'. Es gilt nämlich für $k = 0, \ldots, N-1$

$$\{\tau = k\} = \bigcap_{i=0}^{k-1} \underbrace{\{X_i < a\}}_{\in \mathfrak{A}_i \subset \mathfrak{A}_{k-1}} \cap \underbrace{\{X_k \geq a\}}_{\in \mathfrak{A}_k} \in \mathfrak{A}_k$$

sowie

$$\{\tau = N\} = \bigcap_{i=0}^{N-1} \{X_i < a\} \in \mathfrak{A}_{N-1}.$$

Formal heißt (ii)

$$\tau = \inf\{i \in \{0, \ldots, N\} : X_i = M\} \qquad \text{mit} \qquad M = \max_{i=0,\ldots,N} X_i.$$

Dies ist i.a. keine Stoppzeit, d.h. eine 'nicht realisierbare Strategie'. Betrachte etwa das Cox-Ross-Rubinstein-Modell mit $d < 1 < u$. Für $N = 1$ gilt

$$\{\tau = 0\} = \{Y_1 = d\} \notin \{\emptyset, \Omega\} = \mathfrak{A}_0.$$

Lemma 2.

$$\sigma, \tau \text{ Stoppzeiten bzgl. } \widetilde{\mathfrak{A}} \quad \Rightarrow \quad \sigma + \tau,\ \min\{\sigma, \tau\},\ \max\{\sigma, \tau\} \text{ Stoppzeiten bzgl. } \widetilde{\mathfrak{A}}.$$

Proof. $\boxed{\text{Übung}}$. □

Gegeben: Folge $\widetilde{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

(i) X_n $\mathfrak{A}_n$-meßbar,

(ii) $X_n \in \mathfrak{L}^1$.

Für eine Abbildung $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ definieren wir

$$X_\tau : \Omega \to \mathbb{R}$$

durch

$$X_\tau(\omega) = \begin{cases} X_{\tau(\omega)}(\omega) & \text{falls } \tau(\omega) < \infty \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die folgenden beiden Sätze sind Varianten des *optional sampling theorem*.

Theorem 1.

$$\widetilde{X} \text{ Martingal bzgl. } \widetilde{\mathfrak{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \tau \text{ beschränkte Stoppzeit bzgl. } \widetilde{\mathfrak{A}} : \mathrm{E}(X_\tau) = \mathrm{E}(X_0).$$

Proof. '$\Rightarrow$' Sei τ eine Stoppzeit mit $\tau(\omega) \leq N$ für alle $\omega \in \Omega$. Also

$$X_\tau = \sum_{n=0}^{N} 1_{\{\tau=n\}} \cdot X_n.$$

Also ist X_τ $\mathfrak{A}$-meßbar und $\mathrm{E}(|X_\tau|) \leq \sum_{n=0}^{N} \mathrm{E}(|X_n|) < \infty$. Weiter

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_\tau) &= \sum_{n=0}^{N} \mathrm{E}(1_{\{\tau=n\}} \cdot X_n) = \sum_{n=0}^{N} \mathrm{E}(1_{\{\tau=n\}} \cdot \mathrm{E}(X_N \,|\, \mathfrak{A}_n)) \\ &= \sum_{n=0}^{N} \mathrm{E}(\mathrm{E}(1_{\{\tau=n\}} \cdot X_N \,|\, \mathfrak{A}_n)) = \sum_{n=0}^{N} \mathrm{E}(1_{\{\tau=n\}} \cdot X_N) = \mathrm{E}(X_N) = \mathrm{E}(X_0). \end{aligned}$$

'$\Leftarrow$' Für $n < m$ und $A \in \mathfrak{A}_n$ ist zu zeigen

$$\int_A X_m \, dP = \int_A X_n \, dP.$$

Definiere

$$\tau = n \cdot 1_A + m \cdot 1_{\Omega \setminus A}.$$

Klar: τ ist beschränkte Stoppzeit. Also

$$\mathrm{E}(X_0) = \mathrm{E}(X_\tau) = \mathrm{E}(1_A \cdot X_n + 1_{\Omega\setminus A} \cdot X_m) = \mathrm{E}(X_m) - \mathrm{E}(1_A \cdot X_m) + \mathrm{E}(1_A \cdot X_n).$$

Beachte schließlich, daß n.V. insbesondere $\mathrm{E}(X_0) = \mathrm{E}(X_m)$ gilt. □

Theorem 2.1 und Theorem 1 beantworten die in Example 2.2 gestellten Fragen negativ, solange man eine obere Schranke für die Spieldauer akzeptiert.

Theorem 2. Sei $\widetilde{X}$ Martingal und τ Stoppzeit mit

$$P(\{\tau < \infty\}) = 1 \quad \wedge \quad \mathrm{E}(|X_\tau|) < \infty \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\{\tau > n\}} |X_n| \, dP = 0. \tag{1}$$

Dann

$$\mathrm{E}(X_\tau) = \mathrm{E}(X_0).$$

Proof. Für $\tau_N = \min\{\tau, N\}$ gilt

$$|\,\mathrm{E}(X_\tau) - \mathrm{E}(X_{\tau_N})| \leq \int_{\{\tau>N\}} |X_\tau| \, dP + \int_{\{\tau>N\}} |X_N| \, dP$$

und somit

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}(X_{\tau_N}) = \mathrm{E}(X_\tau).$$

Theorem 1 und Lemma 2 liefern $\mathrm{E}(X_0) = \mathrm{E}(X_{\tau_N})$. □

Example 2. In Example 2.2 gelte: $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. mit $P_{Y_1} = 1/2 \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1})$. Einsatz $H_n = 2^n$ in $(n+1)$-ten Spiel (Verdopplungsstrategie). Nach Theorem 1 (einfacher: Example 2.2) definiert $Z_0 = 0$ und

$$Z_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot Y_{i+1}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

ein Martingal. Für die Stoppzeit

$$\tau = \inf\{i \in \mathbb{N} : Y_i = 1\}$$

ergibt sich

(i) $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : Z_n > 0\}$,

(ii) $Z_\tau = 1$,

(iii) $P(\{\tau = n\}) = 2^{-n}$, also τ f.s. endlich und $\mathrm{E}(\tau) = 2$.

Jedoch ist $\tau > n$ äquivalent zu $Z_n = -1 - \cdots - 2^{n-1} = -(2^n - 1)$, so daß

$$\int_{\{\tau>n\}} |Z_n|\, dP = (2^n - 1) \cdot \sum_{m=n+1}^{\infty} 2^{-m} = 1 - 2^{-n}.$$

Example 3 (Das Ruin-Problem). Betrachte das Glücksspiel aus Example 2.2 mit

$$P_{Y_i} = p \cdot \varepsilon_1 + (1-p) \cdot \varepsilon_{-1}$$

für festes $p \in\,]0,1[$. Startkapital C. Ziel: Gewinn G, wobei $0 < C < G$. Spiele bis G erreicht oder C verspielt. Also

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = G \vee X_n = -C\}.$$

Bestimme die Ruin-Wahrscheinlichkeit $P(\{X_\tau = -C\})$ sowie den Erwartungswert der Spieldauer τ.

Dazu zeigt man vorab

$$\exists\, a > 0\ \exists\, \gamma \in\,]0,1[\ \forall\, j \in \mathbb{N}_0 : \quad P(\{\tau > j\}) \le a \cdot \gamma^j, \tag{2}$$

siehe Irle (1998, p. 48).

Mit (2) folgt

$$P(\{\tau = \infty\}) \le \liminf_{j\to\infty} P(\{\tau > j\}) = 0$$

und weiter

$$\mathrm{E}(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} P(\{\tau \ge j\}) < \infty.$$

Also

$$1 = P(\{\tau < \infty\}) = P(\underbrace{\{X_\tau = G\}}_{\text{'Gewinn'}}) + P(\underbrace{\{X_\tau = -C\}}_{\text{'Ruin'}}).$$

Nun Anwendung des optional sampling theorem. Klar: τ ist unbeschränkt, deshalb verwenden wir Theorem 2.

Definiere $M_0 = 0$ und

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \mathrm{E}(Y_i)) = X_n - na,$$

wobei $a = 2p - 1$. Dann ist $\widetilde{M}$ ein Martingal, siehe Example 2.2. Wir verifizieren die weiteren Voraussetzungen von Theorem 2.

Es gilt

$$|M_\tau| \leq |X_\tau| + \tau \cdot |a| \leq \max\{G, C\} + |a| \cdot \tau,$$

und somit

$$\mathrm{E}(|M_\tau|) \leq \max\{G, C\} + |a| \cdot \mathrm{E}(\tau) < \infty.$$

Ferner

$$\begin{aligned}\int_{\{\tau > n\}} |M_n| \, dP &\leq \int_{\{\tau > n\}} (|X_n| + |a| \cdot n) \, dP \\ &\leq \max\{G, C\} \cdot P(\{\tau > n\}) + |a| \cdot n \cdot P(\{\tau > n\}),\end{aligned}$$

und somit sichert (2)

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\{\tau > n\}} |M_n| \, dP = 0.$$

Theorem 2 liefert

$$\begin{aligned}0 &= \mathrm{E}(M_0) = \mathrm{E}(M_\tau) = \mathrm{E}(X_\tau) - \mathrm{E}(\tau) \cdot a \\ &= G \cdot P(\{X_\tau = G\}) - C \cdot P(\{X_\tau = -C\}) - \mathrm{E}(\tau) \cdot a. \qquad (3)\end{aligned}$$

1. Fall: Faires Spiel, d.h.

$$p = \frac{1}{2}.$$

Dann $a = 0$ und

$$P(\{X_\tau = G\}) = \frac{C}{C + G}, \qquad P(\{X_\tau = -C\}) = \frac{G}{C + G}.$$

Weiterhin ist $(X_n^2 - n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal, und die Voraussetzungen von Theorem 2 sind erfüllt. Also

$$0 = \mathrm{E}(X_0^2 - 0) = \mathrm{E}(X_\tau^2 - \tau) = \mathrm{E}(X_\tau^2) - \mathrm{E}(\tau),$$

so daß

$$\mathrm{E}(\tau) = \mathrm{E}(X_\tau^2) = G^2 \cdot \frac{C}{C + G} + C^2 \cdot \frac{G}{C + G} = C \cdot G.$$

2. Fall Unfaires Spiel, d.h.

$$p \neq \frac{1}{2}.$$

Setze

$$q = \frac{p}{1-p}.$$

Man erhält

$$P(\{X_\tau = G\}) = \frac{1-q^C}{(1/q)^G - q^C}, \qquad P(\{X_\tau = -C\}) = \frac{(1/q)^G - 1}{(1/q)^G - q^C},$$

und mit (3) folgt

$$\mathrm{E}(\tau) = \frac{G \cdot P(\{X_\tau = G\}) - C \cdot P(\{X_\tau = -C)\}}{2p-1}.$$

Siehe Irle (1998, p. 50).

Numerische Berechnungen zeigen: kleine Abweichungen von $p = 1/2$ führen zu drastischen Änderungen der Ruin-Wahrscheinlichkeit.