TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

WS 2006/07
27.10.06

2. Aufgabenblatt zur Vorlesung
"'Probability Theory"'

1. Zeigen Sie:
a) Jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ ist Borel-messbar.
b) Jede differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Borel-messbar. Ist dann auch $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar?
c) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Bedingung

$$\{f = x\} \in \mathcal{A} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

im allgemeinen nicht hinreichend ist für $f \in \mathfrak{Z}(\Omega, \mathcal{A})$.
(*Hinweis:* Betrachten Sie $\Omega = \mathbb{R}$ und wählen Sie $\mathcal{A}$ geschickt.)
d) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum mit $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(\Omega)$. Dann existiert eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $|f| \in \mathfrak{Z}(\Omega, \mathcal{A})$ und $f \notin \mathfrak{Z}(\Omega, \mathcal{A})$.

2. Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f_1, f_2, \ldots \in \mathfrak{Z}(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie

$$\{\omega \in \Omega : \{f_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\} \text{ liegt dicht in } \mathbb{R}\} \in \mathcal{A}.$$

3. a) Let $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I \neq \emptyset$, be measurable spaces. Prove that the corresponding system $\mathcal{R}$ of measurable rectangles is a semi-algebra in Ω. Show that $\mathcal{R}$ is not an algebra, in general.
b) Consider the product space $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B})$. Show that $\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}$ contains

1. the set of bounded sequences,
2. the set of monotone sequences,
3. the set of convergent sequences.

Is any of these sets a cylinder set?

4. Prove or disprove: If $f \in \mathfrak{Z}(\Omega, \mathcal{A})$ and $A \in \mathcal{A}$ then $f(A) \in \mathcal{B}$.