TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

WS 2006/07
27.10.06

1. Aufgabenblatt zur Vorlesung "'Probability Theory"'

Aufgabe 1:
Geben Sie für die folgenden Beispiele jeweils $\alpha(\mathfrak{E}), \sigma(\mathfrak{E})$ sowie $\delta(\mathfrak{E})$ an.

1. $\Omega = \mathbb{Q}$, $\mathfrak{E} = \big\{\{x\} \ : \ x \in \mathbb{Q}\big\}$.
2. $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathfrak{E} = \big\{\{2i \ : \ i \leq n\} \ : \ n \in \mathbb{N}\big\}$
3. $\Omega = [0,1]$, $\mathfrak{E} = \big\{A \subseteq [0,1] \ : \ A \cap \mathbb{Q} \text{ endlich}\big\}$.
4. $\Omega = \bar{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{E} = \big\{[0,\infty), (0,\infty]\big\}$.

Aufgabe 2: Es seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ zwei Algebren in Ω. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ eine Algebra ist genau dann, wenn $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$ oder $\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1$.
(*Hinweis:* Nehmen Sie indirekt an, $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ ist Algebra, und $A_1 \in \mathfrak{A}_1 \backslash \mathfrak{A}_2$ und $A_2 \in \mathfrak{A}_2 \backslash \mathfrak{A}_1$ existieren. Betrachten Sie $A_1 \Delta A_2$.)
Ist die analoge Aussage für σ–Algebren auch wahr?

Aufgabe 3: A *partition* of a set Ω is a subset $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ consisting of disjoint nonempty sets such that $\bigcup_{E \in \mathfrak{E}} E = \Omega$. If $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ and $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{A}$, we shall say that Ω is a partition *in* $\mathfrak{A}$. A partition $\mathfrak{E}_1$ *refines* $\mathfrak{E}_2$ iff for each $E_1 \in \mathfrak{E}_1$ there is $E_2 \in \mathfrak{E}_2$ such that $E_1 \subseteq E_2$. For an algebra $\mathfrak{A}$ in Ω we set

$$p(\mathfrak{A}) := \sup\big\{\#\mathfrak{E} \ : \ \mathfrak{E} \text{ Partition of } \Omega, \ \mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{A}\big\} \ .$$

(a) Show that, if $p(\mathfrak{A}) = n < \infty$, there exists exactly one partition $\mathfrak{E}_0 = \{E_1, \ldots, E_n\} \subseteq \mathfrak{A}$ of cardinality n, which refines every partition in $\mathfrak{A}$. Show further that in this case

$$\mathfrak{A} = \Big\{\bigcup_{i \in I} E_i \ : \ I \subseteq \{1, \ldots, n\}\Big\} \ ,$$

that the mapping $I \mapsto \bigcup_{i \in I} E_i$ is injective, and that consequently

$$\#\mathfrak{A} = 2^n = 2^{p(\mathfrak{A})} \ .$$

(b) Let now $\mathfrak{A}$ be a σ–algebra. Show that, if $p(\mathfrak{A}) = \infty$, there exists an infinite partition $\mathfrak{E}_0 \subseteq \mathfrak{A}$. (*Hint:* Consider intersections of elements of finite partitions.) Conclude from this that

$$\#\mathfrak{A} \geq \#2^{\mathbb{N}} = \#\mathbb{R} \ .$$