Seminar
Numerik und Wissenschaftliches Rechnen

Classical Solvers / Direct Methods

A. Hoffmann

LU Zerlegung ohne Pivotsuche

L ist eine untere Dreiecksmatrix mit $l_{i,i} = 1$ spaltenweise gespeichert
U ist eine obere Dreiecksmatrix zeilenweise gespeichert

```
DO i = 1, n
      DO k = i, n                                   i. Zeile von U
            U(i,k) := K(i,k)
      END DO
      L(i,i) := 1
      DO k = i + 1, n                               i. Spalte von L
            L(k,i) := K(k,i) / U(i,i)
      END DO
      DO k = i + 1, n                               Transformation der Restmatrix
            DO j = i + 1, n
                  K(k,j) := K(k,j) – L(k,i) · U(i,j)
            END DO
      END DO
END DO
```

Blockweise LU Zerlegung

$K_{k,i}$ bezeichnet nun eine Blockmatrix

DO $i = 1, n$

a) *Zerlege* $K_{k,i}$ *so, dass* $K_{k,i} = L_{k,i} \cdot U_{i,i}$ $\qquad (k = i \ldots n)$

$\rightarrow U_{i,i}, L_{i,i}, L_{i+1,i}, \ldots, L_{n,i}$

b) *Bestimme* $U_{i,l}$ *so, dass* $K_{i,l} = L_{i,i} \cdot U_{i,l}$ $\qquad (l = i + 1 \ldots n)$

$\rightarrow U_{i,i+1}, \ldots, U_{i,n}$

c) *Transformiere die Restmatrix*

$$K_{k,l} := K_{k,l} - L_{k,i} \cdot U_{i,l} \qquad (k, l = i + 1 \ldots n)$$

END DO

Blockweise LU Zerlegung

Beispiel:

- Blockmatrix mit 25 Blöcken
- 3x3 Prozessoren
- $K_{i,j} \longrightarrow \mathbb{P}_{(i - 1) \bmod P_x, (j - 1) \bmod P_y}$

$K_{1,1}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{1,2}$ $\mathbb{P}_1$	$K_{1,3}$ $\mathbb{P}_2$	$K_{1,4}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{1,5}$ $\mathbb{P}_1$
$K_{2,1}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{2,2}$ $\mathbb{P}_4$	$K_{2,3}$ $\mathbb{P}_5$	$K_{2,4}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{2,5}$ $\mathbb{P}_4$
$K_{3,1}$ $\mathbb{P}_6$	$K_{3,2}$ $\mathbb{P}_7$	$K_{3,3}$ $\mathbb{P}_8$	$K_{3,4}$ $\mathbb{P}_6$	$K_{3,5}$ $\mathbb{P}_7$
$K_{4,1}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{4,2}$ $\mathbb{P}_1$	$K_{4,3}$ $\mathbb{P}_2$	$K_{4,4}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{4,5}$ $\mathbb{P}_1$
$K_{5,1}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{5,2}$ $\mathbb{P}_4$	$K_{5,3}$ $\mathbb{P}_5$	$K_{5,4}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{5,5}$ $\mathbb{P}_4$

Blockweise LU Zerlegung

Erste Iteration i = 1:

Zerlege $K_{k,1}$ *so, dass* $K_{k,1} = L_{k,1} \cdot U_{1,1}$

$(k = 1, 2, 3, 4, 5)$

$\rightarrow U_{1,1}, L_{1,1}, L_{2,1}, L_{3,1}, L_{4,1}, L_{5,1}$

	$U_{1,1}$				
$L_{1,1}$	$K_{1,1}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{1,2}$ $\mathbb{P}_1$	$K_{1,3}$ $\mathbb{P}_2$	$K_{1,4}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{1,5}$ $\mathbb{P}_1$
$L_{2,1}$	$K_{2,1}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{2,2}$ $\mathbb{P}_4$	$K_{2,3}$ $\mathbb{P}_5$	$K_{2,4}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{2,5}$ $\mathbb{P}_4$
$L_{3,1}$	$K_{3,1}$ $\mathbb{P}_6$	$K_{3,2}$ $\mathbb{P}_7$	$K_{3,3}$ $\mathbb{P}_8$	$K_{3,4}$ $\mathbb{P}_6$	$K_{3,5}$ $\mathbb{P}_7$
$L_{4,1}$	$K_{4,1}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{4,2}$ $\mathbb{P}_1$	$K_{4,3}$ $\mathbb{P}_2$	$K_{4,4}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{4,5}$ $\mathbb{P}_1$
$L_{5,1}$	$K_{5,1}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{5,2}$ $\mathbb{P}_4$	$K_{5,3}$ $\mathbb{P}_5$	$K_{5,4}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{5,5}$ $\mathbb{P}_4$

Blockweise LU Zerlegung

Erste Iteration i = 1:

Bestimme $U_{1,l}$ *so, dass* $K_{1,l} = L_{1,1} \cdot U_{1,l}$

$(l = 2, 3, 4, 5)$

$\rightarrow U_{1,2}\,,\ U_{1,3}\,,\ U_{1,4}\,,\ U_{1,5}$

	$U_{1,1}$	$U_{1,2}$	$U_{1,3}$	$U_{1,4}$	$U_{1,5}$
$L_{1,1}$	$K_{1,1}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{1,2}$ $\mathbb{P}_1$	$K_{1,3}$ $\mathbb{P}_2$	$K_{1,4}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{1,5}$ $\mathbb{P}_1$
$L_{2,1}$	$K_{2,1}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{2,2}$ $\mathbb{P}_4$	$K_{2,3}$ $\mathbb{P}_5$	$K_{2,4}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{2,5}$ $\mathbb{P}_4$
$L_{3,1}$	$K_{3,1}$ $\mathbb{P}_6$	$K_{3,2}$ $\mathbb{P}_7$	$K_{3,3}$ $\mathbb{P}_8$	$K_{3,4}$ $\mathbb{P}_6$	$K_{3,5}$ $\mathbb{P}_7$
$L_{4,1}$	$K_{4,1}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{4,2}$ $\mathbb{P}_1$	$K_{4,3}$ $\mathbb{P}_2$	$K_{4,4}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{4,5}$ $\mathbb{P}_1$
$L_{5,1}$	$K_{5,1}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{5,2}$ $\mathbb{P}_4$	$K_{5,3}$ $\mathbb{P}_5$	$K_{5,4}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{5,5}$ $\mathbb{P}_4$

Blockweise LU Zerlegung

Erste Iteration i = 1:

Transformiere die Restmatrix

$K_{k,l} := K_{k,l} - L_{k,1} \cdot U_{1,l}$

$(k,\ l = 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

	$U_{1,1}$	$U_{1,2}$	$U_{1,3}$	$U_{1,4}$	$U_{1,5}$
$L_{1,1}$	$K_{1,1}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{1,2}$ $\mathbb{P}_1$	$K_{1,3}$ $\mathbb{P}_2$	$K_{1,4}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{1,5}$ $\mathbb{P}_1$
$L_{2,1}$	$K_{2,1}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{2,2}$ $\mathbb{P}_4$	$K_{2,3}$ $\mathbb{P}_5$	$K_{2,4}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{2,5}$ $\mathbb{P}_4$
$L_{3,1}$	$K_{3,1}$ $\mathbb{P}_6$	$K_{3,2}$ $\mathbb{P}_7$	$K_{3,3}$ $\mathbb{P}_8$	$K_{3,4}$ $\mathbb{P}_6$	$K_{3,5}$ $\mathbb{P}_7$
$L_{4,1}$	$K_{4,1}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{4,2}$ $\mathbb{P}_1$	$K_{4,3}$ $\mathbb{P}_2$	$K_{4,4}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{4,5}$ $\mathbb{P}_1$
$L_{5,1}$	$K_{5,1}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{5,2}$ $\mathbb{P}_4$	$K_{5,3}$ $\mathbb{P}_5$	$K_{5,4}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{5,5}$ $\mathbb{P}_4$

Blockweise LU Zerlegung

Zweite Iteration i = 2:

Zerlege $K_{k,2}$ so, dass $K_{k,2} = L_{k,2} \cdot U_{2,2}$

$(k = 2, 3, 4, 5)$

$\rightarrow U_{2,2}, L_{2,2}, L_{3,2}, L_{4,2}, L_{5,2}$

usw.

		$U_{2,2}$			
	$K_{1,1}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{1,2}$ $\mathbb{P}_1$	$K_{1,3}$ $\mathbb{P}_2$	$K_{1,4}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{1,5}$ $\mathbb{P}_1$
$L_{2,2}$	$K_{2,1}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{2,2}$ $\mathbb{P}_4$	$K_{2,3}$ $\mathbb{P}_5$	$K_{2,4}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{2,5}$ $\mathbb{P}_4$
$L_{3,2}$	$K_{3,1}$ $\mathbb{P}_6$	$K_{3,2}$ $\mathbb{P}_7$	$K_{3,3}$ $\mathbb{P}_8$	$K_{3,4}$ $\mathbb{P}_6$	$K_{3,5}$ $\mathbb{P}_7$
$L_{4,2}$	$K_{4,1}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{4,2}$ $\mathbb{P}_1$	$K_{4,3}$ $\mathbb{P}_2$	$K_{4,4}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{4,5}$ $\mathbb{P}_1$
$L_{5,2}$	$K_{5,1}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{5,2}$ $\mathbb{P}_4$	$K_{5,3}$ $\mathbb{P}_5$	$K_{5,4}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{5,5}$ $\mathbb{P}_4$

Blockweise parallele LU Zerlegung

Prozess $\mathbb{P}\,(K_{i,j})$ *speichert Block* $K_{i,j}$

DO i = 1, n

  a) $\mathbb{P}\,(K_{i,i})$: *Bestimme* $U_{i,i}$ *und* $L_{i,i}$ *aus* $K_{i,i} = L_{i,i} \cdot U_{i,i}$

    Sende $L_{i,i}$ *an alle* $\mathbb{P}\,(K_{i,l})$ $(l = i + 1 \ldots n)$

    Sende $U_{i,i}$ *an alle* $\mathbb{P}\,(K_{k,i})$ $(k = i + 1 \ldots n)$

  b) $\mathbb{P}\,(K_{k,i})$ $[k = i + 1, n]$: *Bestimme* $L_{k,i}$ *aus* $K_{k,i} = L_{k,i} \cdot U_{i,i}$

    Sende $L_{k,i}$ *an alle* $\mathbb{P}\,(K_{k,l})$ $(l = i + 1 \ldots n)$

    $\mathbb{P}\,(K_{i,l})$ $[l = i + 1, n]$: *Bestimme* $U_{i,l}$ *aus* $K_{i,l} = L_{i,i} \cdot U_{i,l}$

    Sende $U_{i,l}$ *an alle* $\mathbb{P}\,(K_{k,l})$ $(k = i + 1 \ldots n)$

  c) $\mathbb{P}\,(K_{k,l})$ $[k, l = i + 1, n]$:

    $K_{k,l} := K_{k,l} - L_{k,i} \cdot U_{i,l}$

END DO

Blockweise parallele LU Zerlegung

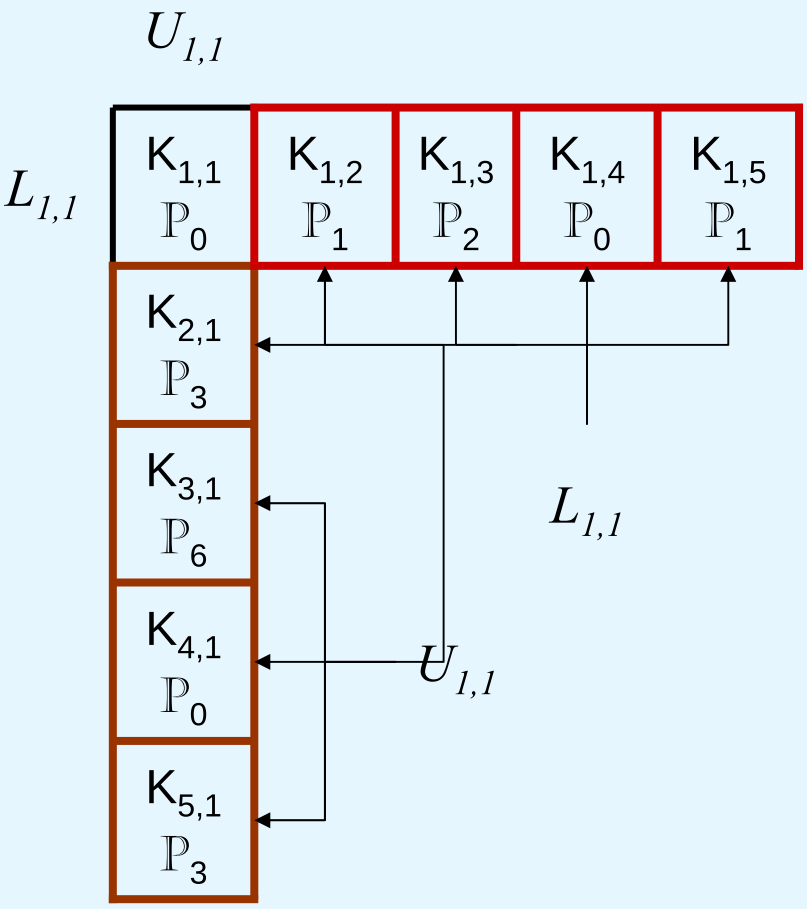
Erste Iteration i = 1:

$\mathbb{P}$ ($K_{1,1}$):

Bestimme $U_{1,1}$ und $L_{1,1}$ aus $K_{1,1} = L_{1,1} \cdot U_{1,1}$

Sende $L_{1,1}$ an alle $\mathbb{P}$ ($K_{1,l}$) (l = 2, 3, 4, 5)

Sende $U_{1,1}$ an alle $\mathbb{P}$ ($K_{k,1}$) (k = 2, 3, 4, 5)

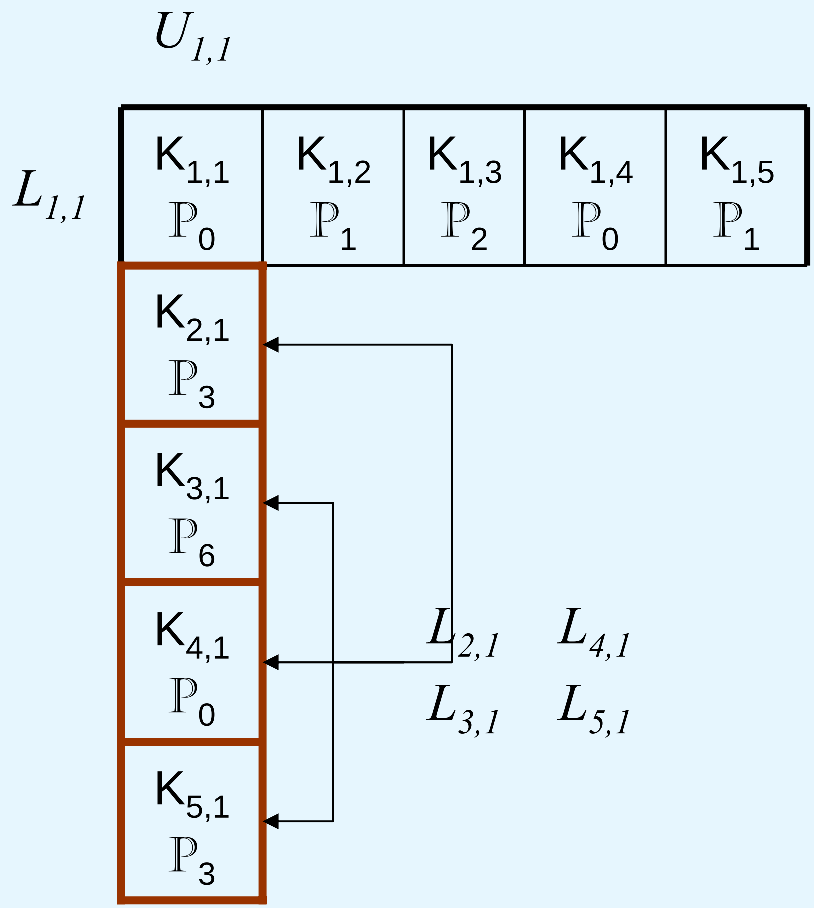


Blockweise parallele LU Zerlegung

Erste Iteration i = 1:

$\mathbb{P}\,(K_{k,1})$ *[k = 2, 3, 4, 5]:*

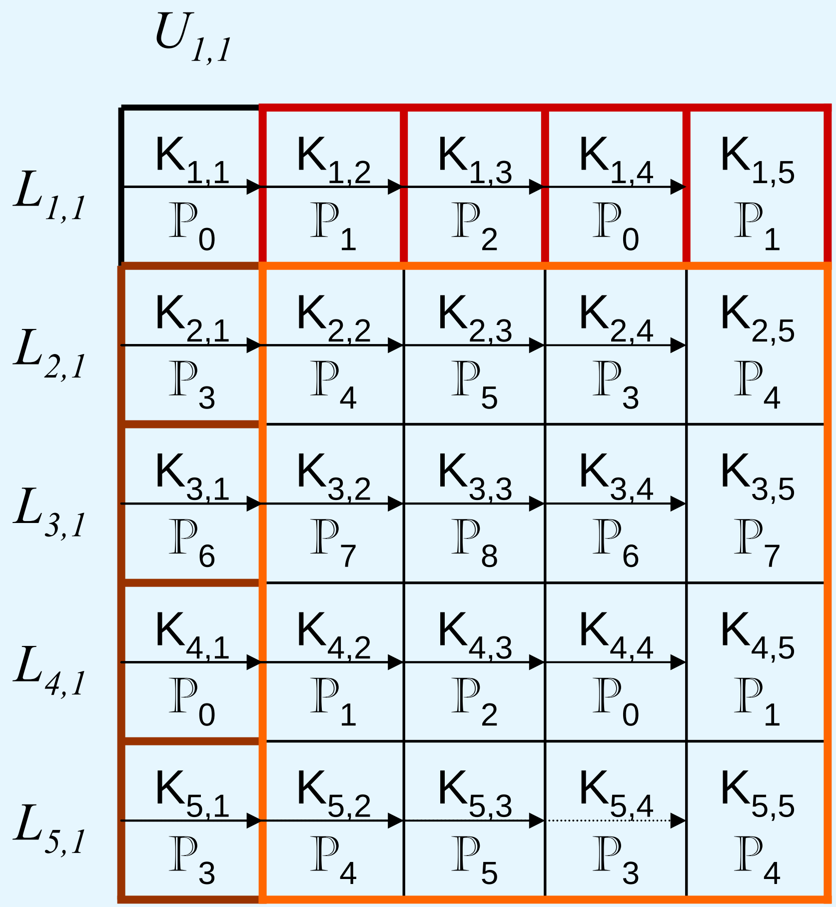
Bestimme $L_{k,1}$ *aus* $K_{k,1} = L_{k,1} \cdot U_{1,1}$



Blockweise LU Zerlegung

Erste Iteration i = 1:

Sende $L_{k,1}$ an alle $\mathbb{P}$ $(K_{k,l})$
$(l = 2, 3, 4, 5)$

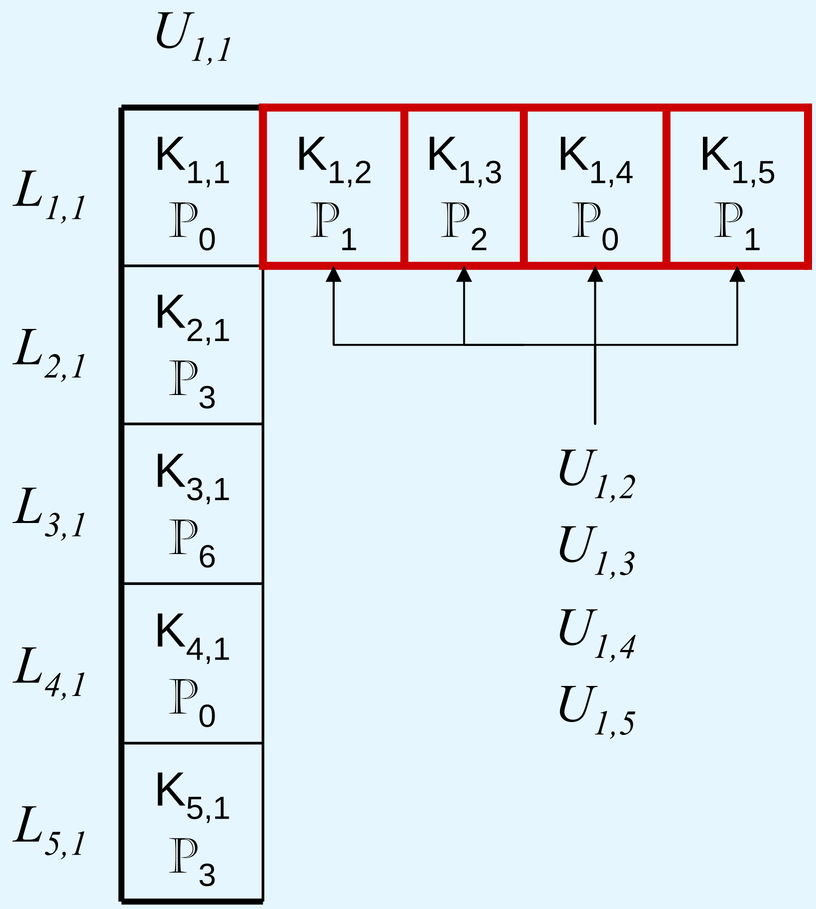


Blockweise parallele LU Zerlegung

Erste Iteration i = 1:

$\mathbb{P}\,(K_{1,l})\ [l = 2, 3, 4, 5]$:

Bestimme $U_{1,l}$ *aus* $K_{1,l} = L_{1,1} \cdot U_{1,l}$



Blockweise LU Zerlegung

Erste Iteration i = 1:

Sende $U_{1,1}$ an alle $\mathbb{P}$ $(K_{k,l})$

$(k = 2, 3, 4, 5)$

	$U_{1,1}$	$U_{1,2}$	$U_{1,3}$	$U_{1,4}$	$U_{1,5}$
$L_{1,1}$	$K_{1,1}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{1,2}$ $\mathbb{P}_1$	$K_{1,3}$ $\mathbb{P}_2$	$K_{1,4}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{1,5}$ $\mathbb{P}_1$
$L_{2,1}$	$K_{2,1}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{2,2}$ $\mathbb{P}_4$	$K_{2,3}$ $\mathbb{P}_5$	$K_{2,4}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{2,5}$ $\mathbb{P}_4$
$L_{3,1}$	$K_{3,1}$ $\mathbb{P}_6$	$K_{3,2}$ $\mathbb{P}_7$	$K_{3,3}$ $\mathbb{P}_8$	$K_{3,4}$ $\mathbb{P}_6$	$K_{3,5}$ $\mathbb{P}_7$
$L_{4,1}$	$K_{4,1}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{4,2}$ $\mathbb{P}_1$	$K_{4,3}$ $\mathbb{P}_2$	$K_{4,4}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{4,5}$ $\mathbb{P}_1$
$L_{5,1}$	$K_{5,1}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{5,2}$ $\mathbb{P}_4$	$K_{5,3}$ $\mathbb{P}_5$	$K_{5,4}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{5,5}$ $\mathbb{P}_4$

Blockweise LU Zerlegung

Erste Iteration i = 1:

$\mathbb{P}(K_{k,l})$ $[k, l = 2, 3, 4, 5]$:

$K_{k,l} = K_{k,l} - L_{k,1} \cdot U_{1,1}$

	$U_{1,1}$	$U_{1,2}$	$U_{1,3}$	$U_{1,4}$	$U_{1,5}$
$L_{1,1}$	$K_{1,1}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{1,2}$ $\mathbb{P}_1$	$K_{1,3}$ $\mathbb{P}_2$	$K_{1,4}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{1,5}$ $\mathbb{P}_1$
$L_{2,1}$	$K_{2,1}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{2,2}$ $\mathbb{P}_4$	$K_{2,3}$ $\mathbb{P}_5$	$K_{2,4}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{2,5}$ $\mathbb{P}_4$
$L_{3,1}$	$K_{3,1}$ $\mathbb{P}_6$	$K_{3,2}$ $\mathbb{P}_7$	$K_{3,3}$ $\mathbb{P}_8$	$K_{3,4}$ $\mathbb{P}_6$	$K_{3,5}$ $\mathbb{P}_7$
$L_{4,1}$	$K_{4,1}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{4,2}$ $\mathbb{P}_1$	$K_{4,3}$ $\mathbb{P}_2$	$K_{4,4}$ $\mathbb{P}_0$	$K_{4,5}$ $\mathbb{P}_1$
$L_{5,1}$	$K_{5,1}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{5,2}$ $\mathbb{P}_4$	$K_{5,3}$ $\mathbb{P}_5$	$K_{5,4}$ $\mathbb{P}_3$	$K_{5,5}$ $\mathbb{P}_4$

Blockweise LU Zerlegung

Erste Iteration i = 2:

$\mathbb{P}\,(K_{2,2})$:

Bestimme $U_{2,2}$ *und* $L_{2,2}$ *aus* $K_{2,2} = L_{2,2} \cdot U_{2,2}$

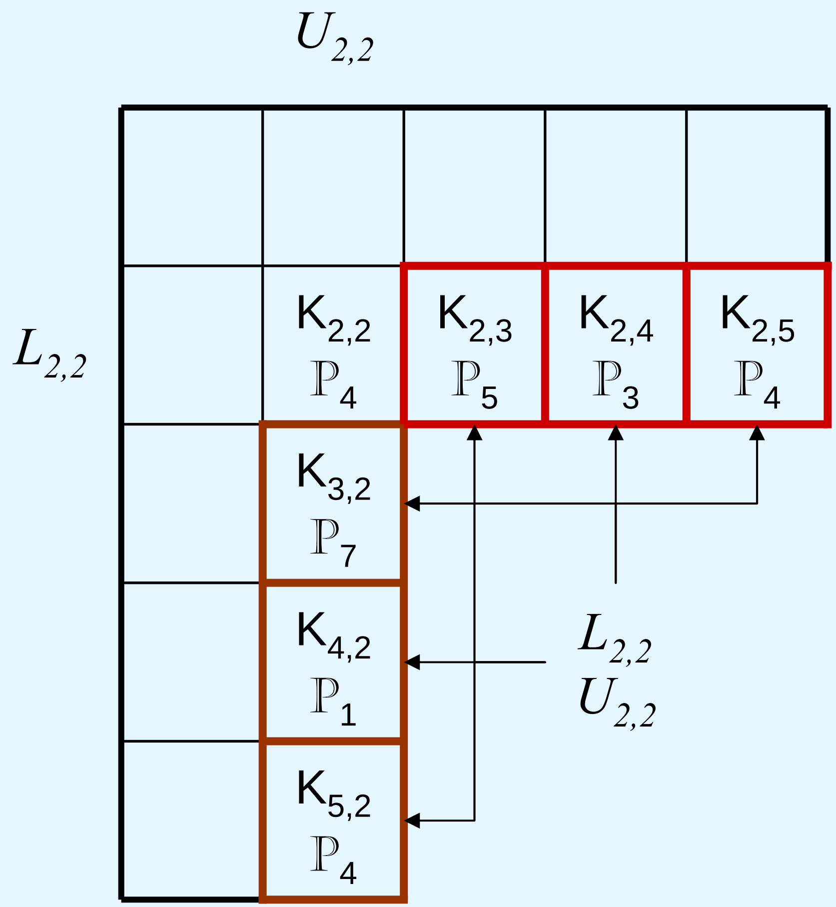
Sende $L_{2,2}$ *an alle* $\mathbb{P}\,(K_{2,l})$

$(l = 3, 4, 5)$

Sende $U_{2,2}$ *an alle* $\mathbb{P}\,(K_{k,2})$

$(k = 3, 4, 5)$

usw.



Blockweise parallele LU Zerlegung

Die Matrizen L und U nach der Zerlegung sind voll besetzt, was im Falle einer sparse Matrix K dazu führt, dass es im für K vorgesehenen Array nicht genügend Speicherplatz zur Verfügung steht (wenn bei Speicherung von K nur von 0 verschiedene Elemente gespeichert wurden).

Das Problem wird mithilfe einer Matrix P und Beibehaltung K‘s Muster gelöst.

$$K = LU - P$$

Es gibt spezielle Verfahren (ILU(m)) für SPD Matrizen, die Beibehaltung K‘s Muster ermöglichen.

Weiter wird ein Verfahren (ILU(0)) für nichtsymmetrische Matrizen ohne Beibehaltung von Muster vorgestellt.

Blockweise sequenzielle ILU Zerlegung

Weiter benutzen wir Vektoren und Matrizen mit folgender Struktur

$$\underline{v}^T = (v_V, v_{E,1}, \ldots, v_{E,n_e}, v_{I,1}, \ldots, v_{I,P})^T.$$

$$\begin{pmatrix} K_V & K_{VE} & K_{VI} \\ K_{EV} & K_E & K_{EI} \\ KI_V & K_{IE} & K_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_V \\ \underline{u}_E \\ \underline{u}_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_V \\ f_E \\ f_I \end{pmatrix}$$

Blockweise sequenzielle ILU Zerlegung

Bestimme

$$L_V, U_V \rightarrow K_V = L_V \cdot U_V - P_V$$
$$L_{EV} \rightarrow K_{EV} = L_{EV} \cdot U_V - P_{EV}$$
$$L_{IV} \rightarrow K_{IV} = L_{IV} \cdot U_V - P_{IV}$$
$$U_{VE} \rightarrow K_{VE} = L_V \cdot U_{VE} - P_{VE}$$
$$U_{VI} \rightarrow K_{VI} = L_V \cdot U_{VI} - P_{VI}$$

$$K_E := K_E - L_{EV} \cdot U_{VE}$$
$$K_{EI} := K_{EI} - L_{EV} \cdot U_{VI}$$
$$K_{IE} := K_{IE} - L_{IV} \cdot U_{VE}$$
$$K_I := K_I - L_{IV} \cdot U_{VI}$$

Bestimme

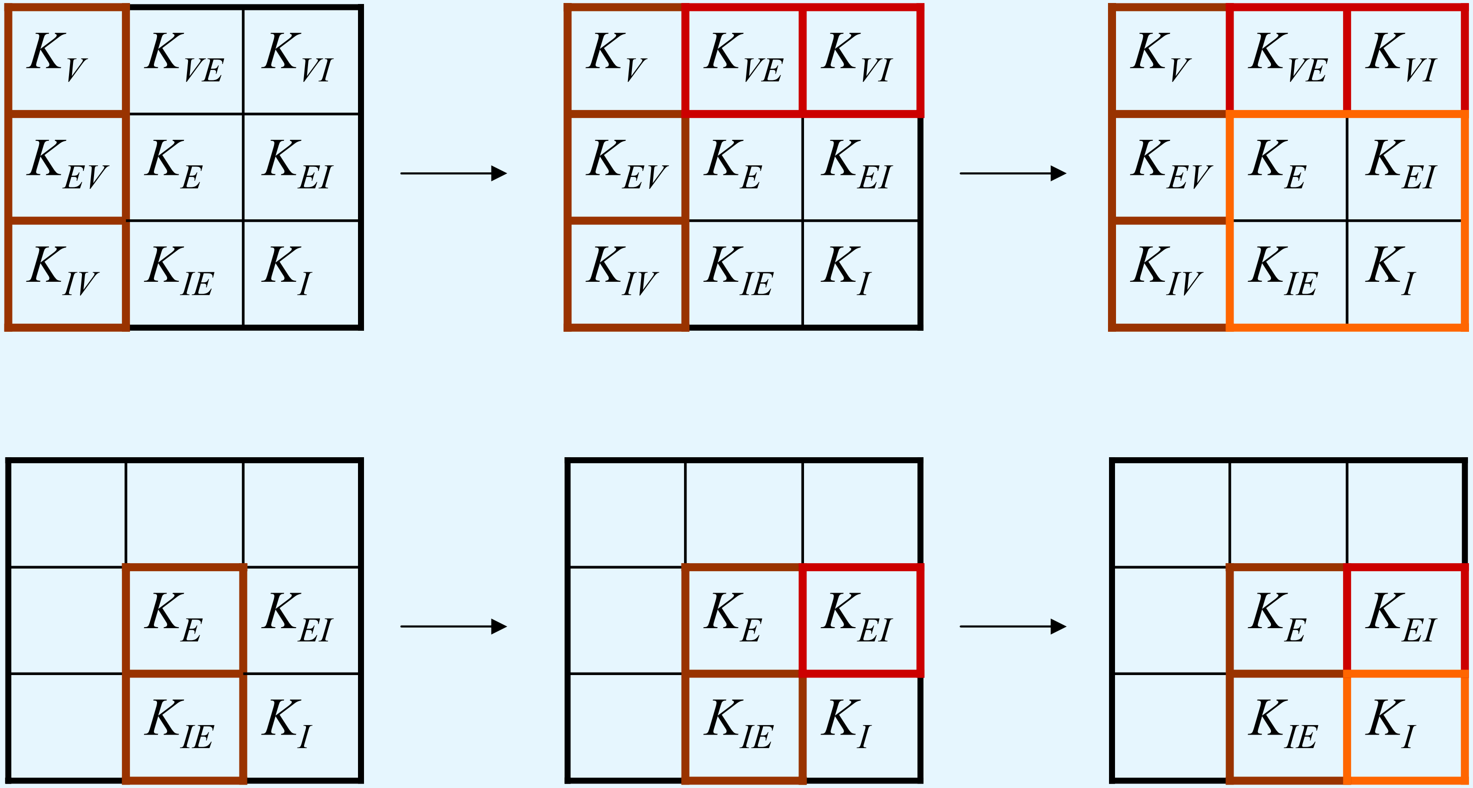
$$L_E, U_E \rightarrow K_E = L_E \cdot U_E - P_E$$
$$L_{IE} \rightarrow K_{IE} = L_{IE} \cdot U_E - P_{IE}$$
$$U_{EI} \rightarrow K_{EI} = L_E \cdot U_{EI} - P_{EI}$$

$$K_I := K_I - L_{IE} \cdot U_{EI}$$

Bestimme

$$L_I, U_I \rightarrow K_I = L_I \cdot U_I - P_I$$

Blockweise sequenzielle ILU Zerlegung



Blockweise sequenzielle ILU Zerlegung

Die Lösung $\underline{w}$ von $L \cdot U \cdot \underline{w} = \underline{r}$ wird anhand Vorwärts- und Rückwärtssubstitution ermittelt.

I) Löse $L\underline{u} = \underline{r}$

$$\underline{u}_V := L_V^{-1}\, \underline{r}_V$$

$$\underline{u}_E := L_E^{-1}\, (\underline{r}_E - L_{EV}\, \underline{u}_V)$$

$$\underline{u}_I := L_I^{-1}\, (\underline{r}_I - L_{IE}\, \underline{u}_E - L_{IV}\, \underline{u}_V)$$

II) Löse $U\underline{w} = \underline{u}$

$$\underline{w}_I := U_I^{-1}\, \underline{u}_I$$

$$\underline{w}_E := U_E^{-1}\, (\underline{u}_E - U_{EI}\, \underline{w}_I)$$

$$\underline{w}_V := U_V^{-1}\, (\underline{u}_V - L_{VE}\, \underline{w}_E - L_{VI}\, \underline{w}_I)$$

Blockweise parallele ILU Zerlegung

Lokale FEM gibt uns eine Matrix K vom Typ II (destributed), d. h. die tatsächliche Matrix K wird folgendermaßen zusammengesetzt (akkumuliert)

$$\sum_{i=1}^{p} A_i^T \cdot K_i \cdot A_i$$

Die erste Idee, wie man blockweise ILU parallelisiert, wäre einfache Umschreibung vom sequentiellen Algorithmus mit der akkumulierten Matrix $\mathfrak{K}$ ($\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{U}$ sind auch akkumuliert).

Blockweise parallele ILU Zerlegung

$$\text{Start } \mathcal{K} = \sum_{i=1}^{p} A_i^T \cdot K_i \cdot A_i$$

Bestimme

$$\mathcal{L}_V,\ \mathcal{U}_V \rightarrow \mathcal{K}_V = \mathcal{L}_V \cdot \mathcal{U}_V - P_V$$

$$\mathcal{L}_{EV} \rightarrow \mathcal{K}_{EV} = \mathcal{L}_{EV} \cdot \mathcal{U}_V - P_{EV}$$

$$L_{IV} \rightarrow K_{IV} = L_{IV} \cdot \mathcal{U}_V - P_{IV}$$

$$\mathcal{U}_{VE} \rightarrow \mathcal{K}_{VE} = \mathcal{L}_V \cdot \mathcal{U}_{VE} - P_{VE}$$

$$U_{VI} \rightarrow K_{VI} = \mathcal{L}_V \cdot U_{VI} - P_{VI}$$

$$\mathcal{K}_E := \mathcal{K}_E - \mathcal{L}_{EV} \cdot \mathcal{U}_{VE}$$

$$K_{EI} := K_{EI} - \mathcal{L}_{EV} \cdot U_{VI}$$

$$K_{IE} := K_{IE} - L_{IV} \cdot \mathcal{U}_{VE}$$

$$K_I := K_I - L_{IV} \cdot U_{VI}$$

Bestimme

$$\mathcal{L}_E,\ \mathcal{U}_E \rightarrow \mathcal{K}_E = \mathcal{L}_E \cdot \mathcal{U}_E - P_E$$

$$L_{IE} \rightarrow K_{IE} = L_{IE} \cdot \mathcal{U}_E - P_{IE}$$

$$U_{EI} \rightarrow K_{EI} = \mathcal{L}_E \cdot U_{EI} - P_{EI}$$

$$K_I := K_I - L_{IE} \cdot U_{EI}$$

Bestimme

$$\mathcal{L}_I,\ \mathcal{U}_I \rightarrow \mathcal{K}_I = \mathcal{L}_I \cdot \mathcal{U}_I - P_I$$

Blockweise parallele ILU Zerlegung

Es werden Matrizen ausschließlich vom Typ I ausmultipliziert, dabei $\mathcal{L}$ eine untere Dreiecksmatrix ist. Das macht Multiplikation zwischen Matrizen vom Typ I ohne Kommunikation (Typumwandlung) möglich.

Blockweise parallele ILU Zerlegung

Die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution $\underline{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{U}^{-1} \cdot \boldsymbol{L}^{-1} \cdot \underline{\boldsymbol{r}}$ brauchen drei Typumwandlungen.

$$I) \qquad \text{Akkumuliere } \underline{\boldsymbol{r}} : \underline{\boldsymbol{r}} = \sum_{i=1}^{p} A_i^T \cdot r_i$$

$\underline{\boldsymbol{r}}_V$, $\underline{\boldsymbol{r}}_E$ und $\underline{r}_I$ sind vom Typ I, deswegen ist die Multiplikation mit $\boldsymbol{L}_V^{-1}$, $\boldsymbol{L}_E^{-1}$ und L_I^{-T} ohne Typumwandlung (Kommunikation) möglich.

$$
\begin{aligned}
II) \qquad & \underline{\boldsymbol{u}}_V := \boldsymbol{L}_V^{-1}\, \underline{\boldsymbol{r}}_V \\
& \underline{\boldsymbol{u}}_E := \boldsymbol{L}_E^{-1}\, (\underline{\boldsymbol{r}}_E - \boldsymbol{L}_{EV}\, \underline{\boldsymbol{u}}_V) \\
& \underline{u}_I := L_I^{-1}\, (\underline{r}_I - L_{IE}\, \underline{\boldsymbol{u}}_E - L_{IV}\, \underline{\boldsymbol{u}}_V) \\
III) \qquad & \underline{u} : \underline{u} = R^{-1} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}
\end{aligned}
$$

Typumwandlung (Typ I $\rightarrow$ Typ II), um Multiplikation mit U^{-1} zu ermöglichen.

Blockweise parallele ILU Zerlegung

$$IV) \quad \underline{w}_I := U_I^{-1}\,\underline{u}_I$$

$$\underline{\boldsymbol{w}}_E := \boldsymbol{U}_E^{-1}\,(\underline{\boldsymbol{u}}_E - \boldsymbol{U}_{EI}\,\underline{w}_I)$$

$$\underline{\boldsymbol{w}}_V := \boldsymbol{U}_V^{-1}\,(\underline{\boldsymbol{u}}_V - \boldsymbol{U}_{VE}\,\underline{\boldsymbol{w}}_E - U_{VI}\,\underline{w}_I)$$

$\underline{\boldsymbol{w}}$ ist jetzt vom Typ II.

$$V) \quad \text{Akkumuliere } \underline{\boldsymbol{w}} : \underline{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{p} A_i^T \cdot w_i$$

Wie schon erwähnt wurde, braucht man während der Lösung von $\underline{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{U}^{-1} \cdot \boldsymbol{L}^{-1} \cdot \underline{\boldsymbol{r}}$ drei Typumwandlungen. Im nächsten Schritt versuchen wir die Anzahl von Typumwandlungen bis auf eine zu verringern.

Blockweise parallele IUL Zerlegung

Start K

Bestimme

$$U_I\,,\, L_I \rightarrow K_I = U_I \cdot L_I - P_I$$
$$L_{IE} \rightarrow K_{IE} = U_I \cdot L_{IE} - P_{IE}$$
$$L_{IV} \rightarrow K_{IV} = U_I \cdot L_{IV} - P_{IV}$$
$$U_{EI} \rightarrow K_{EI} = U_{EI} \cdot L_I - P_{EI}$$
$$U_{VI} \rightarrow K_{VI} = U_{VI} \cdot L_I - P_{VI}$$

$$K_E := K_E - U_{EI} \cdot L_{IE}$$
$$K_{EV} := K_{EV} - U_{EI} \cdot L_{IV}$$
$$K_{VE} := K_{VE} - U_{VI} \cdot L_{IE}$$
$$K_V := K_V - U_{VI} \cdot L_{IV}$$

Akkumuliere $\boldsymbol{\mathcal{K}}_E\,,\, \boldsymbol{\mathcal{K}}_{EV}\,,\, \boldsymbol{\mathcal{K}}_{VE}$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{EV} := \sum_{i=1}^{p} A_{E,i}^T \cdot K_{EV,i} \cdot A_{V,i}$$

Bestimme

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}_E\,,\, \boldsymbol{\mathcal{L}}_E \rightarrow K_E = \boldsymbol{\mathcal{U}}_E \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}}_E - P_E$$
$$\boldsymbol{\mathcal{U}}_{VE} \rightarrow K_{VE} = \boldsymbol{\mathcal{U}}_{VE} \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}}_E - P_{VE}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{EV} \rightarrow K_{EV} = \boldsymbol{\mathcal{U}}_E \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}}_{EV} - P_{EV}$$

$$K_V := K_V - \boldsymbol{\mathcal{U}}_{VE} \cdot R_E^{-1} \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}}_{EV}$$

Akkumuliere $\boldsymbol{\mathcal{K}}_V$

Bestimme

$$U_V,\, L_V \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{K}}_V = \boldsymbol{\mathcal{U}}_V \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}}_V - P_V$$

Blockweise parallele IUL Zerlegung

Die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution $\underline{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{\mathcal{U}}^{-1} \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1} \cdot \underline{\boldsymbol{r}}$ braucht nur eine Typumwandlung.

$\underline{\boldsymbol{r}}_V$, $\underline{\boldsymbol{r}}_E$ und $\underline{r}_I$ sind vom Typ II, deswegen ist die Multiplikation mit $\boldsymbol{\mathcal{U}}_V^{-1}$, $\boldsymbol{\mathcal{U}}_E^{-1}$ und U_I^{-1} ohne Typumwandlung (Kommunikation) möglich.

$$
\begin{aligned}
&I) \quad && \underline{u}_I := U_I^{-1}\,\underline{r}_I \\
& && \underline{\boldsymbol{u}}_E := \boldsymbol{\mathcal{U}}_E^{-1}\,(\underline{\boldsymbol{r}}_E - U_{EI}\,\underline{u}_I) \\
& && \underline{\boldsymbol{u}}_V := \boldsymbol{\mathcal{U}}_V^{-1}\,(\underline{r}_V - \boldsymbol{\mathcal{U}}_{VE}\,\underline{\boldsymbol{u}}_E - U_{VI}\,\underline{u}_I)
\end{aligned}
$$

$$
II) \quad Akkumuliere\ \underline{\boldsymbol{u}} : \underline{\boldsymbol{u}} = \sum_{i=1}^{p} A_i^T \cdot u_i
$$

Jetzt sind Vektoren $\underline{\boldsymbol{u}}_V$, $\underline{\boldsymbol{u}}_E$, und $\underline{\boldsymbol{u}}_I$ vom Typ I. Sie können ohne Typumwandlung mit Matrizen $\boldsymbol{\mathcal{L}}_V^{-1}$, $\boldsymbol{\mathcal{L}}_E^{-1}$ und L_I^{-1} multipliziert werden.

Blockweise parallele IUL Zerlegung

III) $\underline{\boldsymbol{w}}_V := \boldsymbol{\mathcal{L}}_V^{-1}\, \underline{\boldsymbol{u}}_V$

$\underline{\boldsymbol{w}}_E := \boldsymbol{\mathcal{L}}_E^{-1}\, (\underline{\boldsymbol{u}}_E - \boldsymbol{\mathcal{L}}_{EV}\, \underline{\boldsymbol{w}}_V)$

$\underline{w}_I := L_I^{-1}\, (\underline{u}_I - L_{IE}\, \underline{\boldsymbol{w}}_E - L_{IV}\, \underline{\boldsymbol{w}}_V)$

$\underline{\boldsymbol{w}}$ ist jetzt vom Typ I.

ILU und IUL im Vergleich

Die zwei Algorithmen haben gleichen Aufwand und unterscheiden sich lediglich im Sinne von Anzahl der Kommunikationen bei Typumwandlungen.

Algorithmus / Phase	ILU	IUL
Start	**Matrixakkumulation**	**-**
Zerlegung	**-**	**Matrixakkumulation**
Substitution	**2 x Vektorakkumulation**	**1 x Vektorakkumulation**